Lehrstuhl II für Mathematik http://www.math2.rwth-aachen.de
Prof. Dr. E. Triesch **WS 2014/2015**

12. Übung Optimierung B

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass eine ganzzahlige Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ genau dann vollständig unimodular ist, wenn für alle Vektoren $c, d \in \mathbb{Z}^n$ und alle Vektoren $a, b \in \mathbb{Z}^m$ jede Ecke des Polyeders $\{x \in \mathbb{R}^n | c \leq x \leq d, a \leq Ax \leq b\}$ ganzzahlig ist.
Hinweis:
1. Verwenden Sie Aufgabe 5 ii) vom letzten Übungsblatt für die Hinrichtung.
2. Für die andere Richtung benutze man den Satz von Hoffman und Kruskal mit $c = 0$. Finden Sie dann a und d so, dass jede Ecke von $\{x \in \mathbb{R}^n | 0 \leq x, Ax \leq b\}$ enthalten ist in der Menge der Ecken von $\{x \in \mathbb{R}^n | 0 \leq x \leq d, a \leq Ax \leq b\}$.

Aufgabe 2. Sei $(S, \leq)$ eine Halbordnung. Bestimmen Sie ein Ungleichungssystem, dass das Kettenpolytop (die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren der Ketten in S) beschreibt und zeigen Sie, dass das System TDI ist.

Aufgabe 3. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass das System $Ax \leq b$ nicht TDI ist, aber dass das System TDI wird, falls man noch die redundante Ungleichung $x_1 \leq 0$ zu $Ax \leq b$ hinzufügt.
Hinweis: Betrachten Sie den Zielfunktionsvektor $c = (1, 0)^t$.

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$ und $\beta \in \mathbb{Q}$.
i) $Ax \leq b$ sei ein TDI System und die Ungleichung $a^t x \leq \beta$ mit $a \in \mathbb{Q}^n$ folge aus $Ax \leq b$. Zeigen Sie, dass dann das System $Ax \leq b$, $a^t x \leq \beta$ ebenfalls TDI ist.
ii) Das System $Ax \leq b$, $a^t x \leq \beta$ mit $a \in \mathbb{Z}^n$ sei TDI. Zeigen Sie, dass dann das System $Ax \leq b$, $a^t x = \beta$ ebenfalls TDI ist.

Aufgabe 5. Eine $\{0, 1\}$-Matrix A heißt *balanciert*, wenn sie keine $(k \times k)$-Untermatrix mit ungeradem k besitzt, die in jeder Zeile und Spalte genau zwei Einträge 1 hat. Solch eine Matrix kann als als Inzidenzmatrix eines Hypergraphen interpretiert werden, in dem spezielle ungerade Kreise verboten sind. (Das bedeutet: $a_{ij} = 1$ genau dann, wenn Ecke i in Kante j enthalten ist.) Wie bei bipartiten Graphen zerfällt die Kantenmenge von regulären und balancierten Hypergraphen in perfekte Matchings. (Teilmengen von Hyperkanten, die jede Ecke genau einmal überdecken.) Beweisen Sie mit Hilfe dieser Eigenschaft, dass die Polytope

$$\{y \in \mathbb{R}^m \mid Ay = 1, y \geq 0\} \text{ und } \{y \in \mathbb{R}^m \mid Ay \leq 1, y \geq 0\}$$

ganzzahlig sind.