11. Übung Optimierung B

Aufgabe 1. Es sei $D = (V, A)$ ein Digraph und $T := (V, A')$ ein gerichteter Baum. Dann sei C die folgende $|A| \times |A'|$-Matrix:
Für alle $a' \in A'$ und $a = (u, v) \in A$ ist

$$c_{a',a} = \begin{cases} +1, & \text{falls auf einem ungerichteten}(u-v)\text{-Weg in } T \text{ die Kante } a' \text{ vorwärts benutzt wird} \\ -1, & \text{falls auf einem ungerichteten}(u-v)\text{-Weg in } T \text{ die Kante } a' \text{ rückwärts benutzt wird} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

C heißt $Netzwerkmatrix$.
Zeigen Sie, C ist vollständig unimodular.

Aufgabe 2. Eine Intervall-Matrix ist eine 0-1-Matrix so, dass die 1-Einträge in jeder Zeile fortlaufend sind. Zeigen Sie, dass jede Intervall-Matrix vollständig unimodular ist.

Aufgabe 3. Es sei $A := (a_{i,j})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}$ die Inzidenzmatrix eines ungerichteten Graphens G, also

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } v_i \text{ mit } e_j \text{ inzidiert} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Zeigen Sie:
A ist genau dann vollständig unimodular, wenn G bipartit ist.

Aufgabe 4. Beweisen Sie den Satz von König mit Hilfe des Dualitätssatzes.

Aufgabe 5. Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ und $\mathbb{E}_m$ die Einheitsmatrix in $\mathbb{Z}^{m \times m}$. Zeigen Sie:
i) Wenn A vollständig unimodular (vu) ist, dann sind auch $-A$, A^t und $[\mathbb{E}_m, A]$ vu.
ii) Ist A vu, so ist auch $[\mathbb{E}_n, -\mathbb{E}_n, A^t, -A^t]^t$ vu.