10. Übung Optimierung B

Aufgabe 1. Seien $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$, **so dass die Vektoren $\mathbf{a_1, \dots, a_m}$ nicht den ganzen Raum $\mathbb{R}^\mathbf{n}$ aufspannen**. Weiter sei $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall entweder (I) oder (II) gilt:

(I) Es ex. $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\xi^t a_i \leq 0$ für $1 \leq i \leq m$ und $\xi^t b > 0$. Außerdem kann ξ so gewählt werden, dass die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \xi^t x = 0\}$ $s-1$ linear unabhängige Vektoren aus $\{a_1, \dots, a_m\}$ enthält, wobei $s = \operatorname{rang}(a_1 \mid \cdots \mid a_m \mid b)$.

(II) $b \in K(a_1, \dots, a_m)$.

Hinweis: Die entsprechende Aussage für den Fall, dass die Vektoren $a_1, \dots, a_m$ den ganzen $\mathbb{R}^n$ aufspannen, können Sie als bewiesen voraussetzen (siehe Vorlesung).

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$. Dem linearen Programm

$$\max c^t x \text{ s. t. } Ax \leq b \text{ (P)}$$

wurde in der Vorlesung sein duales Programm

$$\min b^t y \text{ s. t. } A^t y = c, y \geq 0 \text{ (D)}$$

zugeordnet. Zeigen Sie, dass das duale Programm von (D) wieder ein zu (P) äquivalentes Optimierungsproblem ist.

Aufgabe 3. Stellen Sie zu folgenden linearen Optimierungsproblemen, die zugehörigen dualen Probleme auf. Dabei sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$:

a) $\max c^t x$ s. t. $Ax \leq b$, $x \geq 0$,

b) $\min c^t x$ s. t. $Ax \geq b$,

c) $\min c^t x$ s. t. $Ax = b$,

d)
$$\left\{\begin{array}{lrcrcrcr} \max & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & & \\ \text{s. t.} & 2x_1 & + & 2x_2 & & & = & 7 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & \leq & 8 \\ & 4x_1 & & & - & 5x_3 & = & -2 \\ & 9x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \geq & -5 \\ & x_1 & & & & & \geq & 0 \\ & & & & & x_3 & \leq & 0 \end{array}\right. .$$

Aufgabe 4. Gegeben sei das Minimum Cost Flow Problem (MCF) $\min c^t x$ s. t. $Bx = b$ und $0 \leq x \leq u$. Dabei ist B die Inzidenzmatrix des zugrunde liegenden Netzwerks $D = (V, A)$, $c \in \mathbb{R}^{|A|}$ der Zielfunktionsvektor, $b \in \mathbb{R}^{|V|}$ der Nachfrage- bzw. Verbrauchsvektor und $u \in (\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\})^{|A|}$ die Kapazitätsfunktion. Beweisen Sie die folgenden beiden Optimalitätskriterien für (MCF) mit Hilfe von Methoden aus der linearen Optimierung.

a) Es existiert ein Vektor $y \in \mathbb{R}^{|V|}$, so dass für jede Kante $a = (v, w) \in A$ gilt:

Falls $c_{v,w} + y_w - y_v > 0$, dann gilt $x_{v,w} = 0$.
Falls $0 < x_{v,w} < u_{v,w}$, dann gilt $c_{v,w} + y_w - y_v = 0$.
Falls $c_{v,w} + y_w - y_v < 0$, dann gilt $x_{v,w} = u_{v,w}$.

b) Es existiert ein Vektor $y \in \mathbb{R}^{|V|}$, so dass für jede Kante $a = (v, w) \in A$ gilt:

$$c_{v,w} + y_w - y_v \geq 0.$$