9. Übung Optimierung B

Aufgabe 1.
Es sei $(H, \prec)$ eine endliche, halbgeordnete Menge. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Elemente einer längsten Kette in H gleich der minimalen Anzahl von Antiketten ist, in die H zerlegt werden kann.

Aufgabe 2.
(a) Es sei X eine n-elementige Menge, $(\mathcal{P}(X), \subset)$ der Potenzmengenverband von X und L eine Antikette in $(\mathcal{P}(X), \subset)$. Mit a_k sei die Anzahl der Elemente der Größe k in L bezeichnet. Zeigen Sie die LYM-Ungleichung (benannt nach Lubell, Yamamoto, Meshalkin):

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq 1$$

(b) Folgern Sie aus Teil (a) den Satz von Sperner (1928): Die maximale Kardinalität einer Antikette in $(\mathcal{P}(X), \subset)$ ist $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.
Hinweis zu (a): Bestimmen Sie für $A \in \mathcal{P}(X)$ die Anzahl der maximalen Ketten, die A enthalten.

Aufgabe 3. i) Angenommen, es sind $N = nm + 1$ verschiedene Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ von links nach rechts an eine Tafel geschrieben. Zeigen Sie, dass einige Zahlen so weggewischt werden können, dass
- entweder $n + 1$ Zahlen $a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ mit $i_0 < i_1 < \ldots < i_n$ und $a_{i_0} < a_{i_1} < \ldots < a_{i_n}$
- oder $m + 1$ Zahlen $a_{j_0}, a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}$ mit $j_0 < j_1 < \ldots < j_m$ und $a_{j_0} > a_{j_1} > \ldots > a_{j_m}$
übrigbleiben.
ii) Angenommen, es sind $N = nm + 1$ (offene) Intervalle auf $\mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie:
Es gibt entweder $n+1$ Intervalle mit einem gemeinsamen Punkt oder $m+1$ paarweise disjunkte Intervalle.
Hinweis: Wenden Sie dann den Satz von Dilworth an.

Aufgabe 4. Gegeben sei das Minimum Cost Flow Problem (MCF) $\min c^t x$ s. t. $Bx = b$ und $0 \leq x \leq u$. Dabei ist B die Inzidenzmatrix des zugrunde liegenden Netzwerks $D = (V, A)$, $c \in \mathbb{R}^{|A|}$ der Zielfunktionsvektor, $b \in \mathbb{R}^{|V|}$ der Nachfrage- bzw. Verbrauchsvektor und $u \in (\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\})^{|A|}$ die Kapazitätsfunktion.
Zeigen Sie, dass das (MCF) genau dann eine nach unten beschränkte Zielfunktion hat, wenn es keinen gerichteten Kreis C im zugrunde liegenden Netzwerk $D = (V, A)$ gibt, dessen Bögen unbeschränkte Kapazität besitzen ($u_a = \infty$ für alle Bögen a des Kreises C) und bei dem die Summe $\sum_{a \text{ Bogen von } C} c_a$ negativ ist.