7. Übung Optimierung B

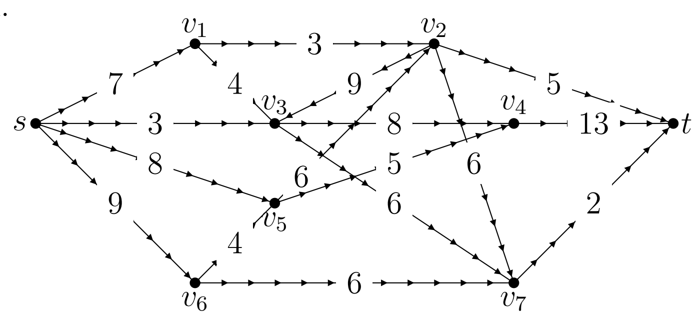
Dijkstra-Algorithmus
Eingabe: Ein Digraph $D := (V, A)$ mit einer ausgezeichneten Ecke $s \in V$ und einer Längenfunktion $l : A \to \mathbb{R}^+$.
Schritt 1: Setze $\text{dist}(s) := 0$, $\text{dist}(v) = l(a)$ für $a = (s, v) \in A$ und $\text{dist}(v) = \infty$ für $(s, v) \notin A$. Außerdem definiere $T := V \setminus \{s\}$ und $\text{pred}(v) := s$ für $v \in T$.
Schritt 2: Sei $U := \{u \in T \mid \text{dist}(u) \leq \text{dist}(v) \text{ für alle } v \in T\}$, setze dann $T := T \setminus U$.
Schritt 3: Für jedes $u \in U$ und für alle Bögen $a = (u, v) \in A$ mit $v \in T$ überprüfe man, ob $\text{dist}(v) > \text{dist}(u) + l(a)$. Falls ja, so setze man $\text{dist}(v) := \text{dist}(u) + l(a)$ und $\text{pred}(v) := u$.
Schritt 4: Falls $T = \emptyset$: STOP. Anderenfalls gehe man zu Schritt 2.

Aufgabe 1. Beweisen Sie die folgende Aussage: Der Dijkstra Algorithmus, durchgeführt am Graphen $D = (V, A)$ mit ausgezeichneter Ecke s, liefert zu jeder Ecke $v \in V$ die Länge $\text{dist}(v)$ eines kürzesten gerichteten $(s - v)-$Weges ($\text{dist}(v) = \infty$ bedeutet, dass kein solcher Weg existiert). Der Digraph $F := (V', A')$ mit

$$V' := \{v \in V \mid \text{dist}(v) < \infty\} \text{ und } A' := \{(\text{pred}(v), v) \mid v \in V' \setminus \{s\}\}$$

hat die folgenden Eigenschaften:
1. $A' \subseteq A$.
2. F ist ein Baum.
3. Für jede Ecke $v \in V' \setminus \{s\}$ gibt es genau einen gerichteten $(s - v)-$Weg in F. Dies ist gleichzeitig ein kürzester $(s - v)-$Weg in D.

Aufgabe 2. Geben Sie einen maximalen Fluss und einen minimalen Schnitt im abgebildeten Netzwerk (D, s, t) an.



Aufgabe 3. Es sei (D, s, t) ein Netzwerk mit Kapazitätsfunktion c. Zeigen Sie:
i) C ist genau dann ein minimaler Schnitt, wenn für einen maximalen Fluss x und jeden Bogen $a \neq (t, s)$ gilt, dass

$$x_a = \begin{cases} c_a & a = (u, v), u \in C, v \notin C \\ 0 & a = (v, u), u \in C, v \notin C \end{cases}$$

ii) falls C und C' minimale Schnitte sind, dann auch $C \cup C'$ und $C \cap C'$, d.h. die Menge der minimalen Schnitte ist ein distributiver Verband
iii) im Beweis des *Max-Flow Min-Cut Theorems* wird das minimale Element des Verbands der minimalen Schnitte konstruiert

Aufgabe 4.
Es sei $K \in \mathbb{N}$. Im abgebildeten Netzwerk (D, s, t) ist der maximale Wert eines Flusses offenbar $2K$. Zeigen Sie, dass der Ford-Fulkerson-Algorithmus bei einer ungünstigen Wahl der vergrößernden $s-t$-Wege auch $2K$ Schritte benötigt, um den Fluss x^* mit $val(x^*) = 2K$ zu finden.