6. Übung Optimierung B

Aufgabe 1. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph ohne isolierte Ecken, weiter sei $\deg_G(v) \leq k$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass

$$\nu(G) \geq \frac{|V(G)|}{k+1}$$

gilt.

Aufgabe 2. Ein odd-set-cover eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Menge

$$\mathcal{H} := \{S_1, \ldots, S_k, v_1, \ldots, v_r\}$$

bestehend aus Teilmengen $S_i \subseteq V$ ungerader Kardinalität und Ecken $v_i \in V$, so dass jede Kante $e \in E$ entweder von einem Punkt v_i gecovert wird oder vollständig in einer Menge S_i liegt. Das Gewicht eines odd-set-cover $\mathcal{H}$ ist definiert als $w(\mathcal{H}) := r + \sum_{i=1}^{k} \frac{|S_i|-1}{2}$. Zeigen Sie, dass die folgende Min-Max-Beziehung gilt:

$$\nu(G) = \min\{w(\mathcal{H}) \mid \mathcal{H} \text{ ist ein odd-set-cover}\}.$$

Algorithmus von Moore, Bellman und Ford:
Eingabe: Ein Digraph $D := (V, A)$ mit einer ausgezeichneten Ecke $s \in V$ und einer Längenfunktion $l : A \to \mathbb{R}$. D darf dabei keine negativen Kreise enthalten.
Schritt 1: Setze $\operatorname{dist}(s) := 0$ und $\operatorname{dist}(v) = \infty$ für alle $v \in V \setminus \{s\}$.
Schritt 2 bis n: Für alle Bögen $a = (v, w) \in A$ überprüfe man, ob $\operatorname{dist}(w) > \operatorname{dist}(v) + l(a)$. Falls ja, so setze man $\operatorname{dist}(w) := \operatorname{dist}(v) + l(a)$ und $\operatorname{pred}(w) := v$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass der Algorithmus von Moore Bellman und Ford kürzeste Wege von s zu allen Ecken $v \in V$ sowie deren Längen ausgibt.

Aufgabe 4.
a) Führen Sie den Algorithmus von Moore, Bellman und Ford an dem Graphen mit Bewertungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 4 \\ \infty & 0 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 7 & 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

durch und wählen Sie $s := x_3$.
b) Warum ist ein Kürzeste-Wege Problem auf einem Graphen, der einen negativen Kreis enthält, nicht sinnvoll gestellt?