4. Übung Optimierung B

Aufgabe 1. In einer Werbeagentur mit 5 Angestellten sind 5 Aufträge zu erledigen. Die Qualifikation des Mitarbeiters i für den Auftrag j sei durch die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

beschrieben (1: sehr gut ... 5: miserabel). Legen Sie zuerst Matrix A zugrunde und weisen Sie jedem Mitarbeiter genau einen Auftrag zu, so dass die Summe der Qualifikationskoeffizienten möglichst klein wird. Legen Sie dann Matrix B zugrunde und weisen Sie jedem Mitarbeiter genau einen Auftrag zu, so dass die Summe der Qualifikationskoeffizienten möglichst groß wird.

Aufgabe 2. Für eine $n \times n$ Matrix A bezeichne $s(A)$ die Summe aller Einträge von A. Im Algorithmus für das Zuordnungsproblem mit einer $n \times n$ Kostenmatrix C habe der Graph G_k kein perfektes Matching für ein $k \geq 1$. Zeigen Sie, dass dann $s(C^{(k+1)}) < s(C^{(k)})$ gilt.

Aufgabe 3. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $A_G \neq \emptyset$ (alle Bezeichnungen sind wie im Gallai-Edmonds-Struktursatz gewählt). Der bipartite Graph $H = (U \cup W, F)$ sei wie folgt definiert: $U = A_G$, die Knoten in W entsprechen bijektiv den Komponenten von $G[D_G]$ und $uw \in F$ genau dann, wenn $u \in U = A_G$ mit der w entsprechenden Komponente in G verbunden ist. Zeigen Sie, dass dann $|\Gamma_H(S)| > |S|$ für alle $S \subseteq U$, $S \neq \emptyset$ gilt.

Aufgabe 4. Sei $q(G)$ die Anzahl der ungeraden Komponenten von G.
i) Beweisen Sie den 1-Faktorsatz von Tutte:
G besitzt genau dann ein perfektes Matching, wenn $q(G - S) \leq |S|$ für alle $S \subseteq V$.
ii)Beweisen Sie die Berge-Formel:
Für alle Graphen $G = (V, E)$ gilt:

$$|V| - 2\nu(G) = \max_{S \subseteq V}(q(G - S) - |S|).$$