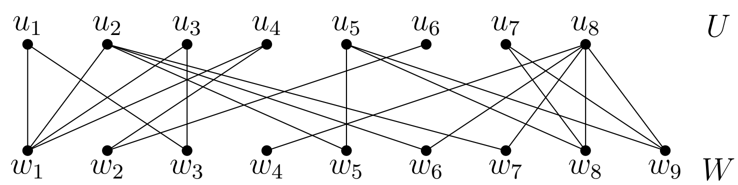
3. Übung Optimierung B

Aufgabe 1. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Hall:
(i) Ein bipartiter und r-regulärer Graph G (d.h. $d(v) = r$ für alle Ecken v aus G) lässt sich in r kantendisjunkte perfekte Matchings zerlegen.
(ii) Ist G ein bipartiter Graph und r der maximale Eckengrad von G, so kann man G in r kantendisjunkte Matchings zerlegen.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie im abgebildeten bipartiten Graphen $G = (U \dot\cup W, E)$ ein Maximum Matching und eine Knotenüberdeckung minimaler Größe mit Hilfe der 'Ungarischen Methode'. Starten Sie mit dem Matching $M = \{u_1w_1, u_3w_3, u_5w_5, u_8w_8\}$ und wählen Sie in Schritt (1.1) des Algorithmus stets denjenigen Knoten aus, der unter allen im vorigen Schritt neu markierten Knoten den kleinsten Index hat. Sie können zur Lösung das Hilfsblatt zur dritten Übung verwenden.



Aufgabe 3. Beweisen Sie den Satz von Mendelsohn-Dulmage:
Es sei $G := (V = U \cup W, E)$ ein bipartiter Graph mit den beiden Partitionen U und W. Desweiteren seien M_1 und M_2 Matchings in G.
Zeigen Sie, es existiert ein Matching $M \subset M_1 \cup M_2$, das alle Ecken aus U, die von M_1 überdeckt werden und alle Ecken aus W, die von M_2 überdeckt werden, überdeckt.

Aufgabe 4. Es sei $G = (U \cup W, E)$ ein bipartiter Graph mit Farbklassen U und W. In G sei die Hall-Bedingung erfüllt und für jedes $u \in U$ gelte $d(u) = |\Gamma(u)| \geq r > 0$. Zeigen Sie als quantitative Verallgemeinerung des Satzes von Hall: Im Fall $r \leq |U|$ gibt es in G mindestens $r!$ verschiedene Matchings der Größe $|U|$ und im Fall $r > |U|$ mindestens $\frac{r!}{(r-|U|)!}$ solcher Matchings.

<u>Hinweis:</u> Induktion nach $|U|$. Eine Teilmenge A von U heißt kritisch, falls $|A| = |\Gamma(A)|$. Wenn es keine von $\emptyset$ und U verschiedene kritische Teilmenge von U gibt, so wählen Sie für ein $\hat{u} \in U$ einen beliebigen Matchingpartner $\hat{w} \in W$ aus. Was gilt dann für $G' := G \setminus \{\hat{u}, \hat{w}\}$? Ist $A_0 \subseteq U$ kritisch und $\emptyset \neq A_0 \neq U$, so betrachten Sie die von $A_0 \cup \Gamma(A_0)$ bzw. $(U \setminus A_0) \cup (W \setminus \Gamma(A_0))$ induzierten Teilgraphen von G.

Aufgabe 5. Es sei $G = (U \cup W, E)$ ein bipartiter Graph mit Farbklassen U und W. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Hall, dass $\nu(G) = |U| - \delta$, wobei $\delta = \max_{X \subset U} \{|X| - |\Gamma(X)|\}$.

Forschungsproblem. Es gibt einige Klassen von Hypergraphen, die eine Verallgemeinerung von bipartiten Graphen darstellen zum Beispiel balancierte Hypergraphen. Wie bei bipartiten Graphen zerfällt die Kantenmenge von regulären und balancierten Hypergraphen in perfekte Matchings und es gibt einen einfachen kombinatorischen Algorithmus um solch eine Zerlegung zu konstruieren. Dennoch gibt es bisher keinen effizienten kombinatorischen Matching-Algorithmus für balancierte Hypergraphen entsprechend der ungarischen Methode für bipartite Graphen.