1. Übung Optimierung B

Aufgabe 1. (a) Sei G ein Graph mit Eckenmenge V. Zeigen Sie, dass es dann mindestens zwei Ecken mit gleichem Grad in V gibt.
(b) Angenommen der Graph G mit n Ecken besitzt genau die Grade $0, 1, ..., n-2$. Welchen Grad besitzen zwei der Ecken von G?

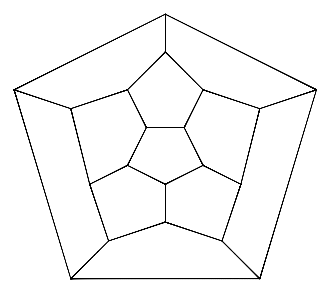
Aufgabe 2. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $n = |V| \geq 2$ Knoten und zwei Komponenten.
(a) Geben Sie eine obere Schranke für die Zahl der Kanten in G an.
(b) Geben Sie für jedes n einen solchen Graphen mit maximaler Kantenzahl an.

Aufgabe 3. Es sei $\delta \geq 2$ und $G = (V, E)$ ein Graph, so dass jeder Knoten $v \in V$ die Ungleichung $d(v) \geq \delta$ erfüllt. Zeigen Sie, dass G einen Kreis C der Länge $L(C) \geq \delta + 1$ besitzt.

Aufgabe 4. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
(a) Ein zusammenhängender und nichttrivialer Multigraph G ist genau dann eulersch, wenn alle seine Eckengrade gerade sind.
(b) Ein zusammenhängender und nichttrivialer Multigraph G ist genau dann eulersch, wenn man ihn in kantendisjunkte Kreise zerlegen kann.

Aufgabe 5.

Finden Sie einen Hamiltonschen Kreis im 'Dodekaedergraphen'.
Bemerkung: Diese Aufgabe wurde von Hamilton 1859 in Form eines Rätsels unter dem Namen 'Peter around the world' gestellt.



Forschungsproblem. Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$, so dass für jede Teilmenge $U \subseteq V$ mit $|U| \geq 3$ mindestens eine Kante $e \in E$ existiert, die zwei Ecken aus U verbindet. Wie viele kantendisjunkte Dreiecke (Kreise der Länge drei) enthält dieser Graph mindestens?