Aufgabe 1: (15 Punkte)

Bestimmen Sie eine Matrix deren Spalten eine Basis des Lösungsraumes des folgenden linearen Differentialgleichungssystems bilden:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= & x(t) & & & + & z(t) \\ \dot{y}(t) &= & -2x(t) & + & 2y(t) & + & 6z(t) \\ \dot{z}(t) &= & & & & & z(t) \end{cases}.$$

Lösung: Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ die das System definierende Matrix.

1. Schritt: Wir bringen A auf Jordan-Normalform. Dazu berechnen wir zunächst die Eigenwerte von A. Es gilt

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda) - 0 \cdot (-2)] = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Die Matrix A hat also den doppelten Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und den einfachen Eigenwert $\lambda_2 = 2$. Nun berechnen wir die zugehörigen Eigenräume.

a) Zu $\lambda_1 = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Also ist $\mathrm{Kern}(A - \mathrm{Id}) = \mathrm{span}\{(1,2,0)^T\}$.

b) Zu $\lambda_2 = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Also ist $\mathrm{Kern}(A - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{span}\{(0,1,0)^T\}$.

Außerdem müssen wir den Kern von $(A - \mathrm{Id})^2$ bestimmen. Es gilt

$$(A - \mathrm{Id})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\mathrm{Kern}(A - \mathrm{Id})^2 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nun definieren wir

$$
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &:= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
x_1^{(1)} &:= (A - \mathrm{Id})x_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
x_2^{(1)} &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Mit $B = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(1)})$ gilt dann

$$
B^{-1}AB = J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.
$$

2. Schritt: Die Spalten der Matrix

$$
Y(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t & \\ & e^t & \\ & & e^{2t} \end{pmatrix}
$$

bilden eine Basis des Lösungsraumes für das System $\dot{y} = J_A y$.
3. Schritt: Die Spalten von

$$
BY(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & te^t & \\ & e^t & \\ & & e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2e^t + te^t & \\ 2e^t & 2te^t & e^{2t} \\ & e^t & \end{pmatrix}
$$

bilden eine Basis des Lösungsraumes für das ursprüngliche System.

Aufgabe 2.1: (M: -2, P: 6)

Bestimmen Sie den Typ der Kurve

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - 4x_2^2 - 12x_1x_2 + 2x_1 + 28x_2 - 10 = 0\}.$$

Lösung: Mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$ und $b^T = (1, 14)$ ist

$$\begin{aligned} K &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - 4x_2^2 - 12x_1x_2 + 2x_1 + 28x_2 - 10 = 0\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + 2b^T\mathbf{x} - 10 = 0\}. \end{aligned}$$

Um den Typ zu bestimmen, berechnen wir die Eigenwerte von A. Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathrm{Id}) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -6 \\ -6 & -4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-4-\lambda) - 6^2 \\ &= \lambda^2 + 3\lambda - 40 \\ &= (\lambda - 5)(\lambda + 8). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = -8$. Die Normalform von K ist demnach

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \gamma = 5y_1^2 - 8y_2^2 + b^T m + c = 5y_1^2 - 8y_2^2 + (1, 14)m - 10 = 0.$$

Nun bestimmen wir die Lösung von $Am = -b$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & | & -1 \\ -6 & -4 & | & -14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -6 & | & -1 \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Also ist $m = (2, \frac{1}{2})^T$ die eindeutig bestimmte Lösung. Eingesetzt in die Normalform erhalten wir

$$5y_1^2 - 8y_2^2 + 9 - 10 = 5y_1^2 - 8y_2^2 - 1 = 0.$$

Diese Gleichung beschreibt eine Hyperbel. Die richtige Antwort ist also b).

Aufgabe 2.2: (M: -2, P: 8)

Wie lauten die Hauptachsen der Kurve

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : -2x_1^2 - 2x_2^2 - 12x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 = 0\}?$$

Lösung: Mit $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$ und $b^T = (1, 1)$ ist

$$\begin{aligned} K &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : -2x_1^2 - 2x_2^2 - 12x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 = 0\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + 2b^T\mathbf{x} = 0\}. \end{aligned}$$

Die Hauptachsen sind die Eigenvektoren von A. Wir berechnen also zunächst die Eigenwerte von A. Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathrm{Id}) &= \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -6 \\ -6 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-2-\lambda)^2 - 6^2 \\ &= \lambda^2 + 4\lambda - 32 \\ &= (\lambda - 4)(\lambda + 8). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -8$. Jetzt berechnen wir die Eigenvektoren von A.

a) zu $\lambda_1 = 4$: wir lösen das lineare Gleichungssystem $(A - 4\mathrm{Id})v = 0$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -6 & -6 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Also ist der Vektor $v_1 = (1, -1)^T$ ein Lösungsvektor.

b) zu $\lambda_2 = -8$: der Eigenvektor muss senkrecht auf v_1 stehen, also ist der Vektor $v_2 = (1, 1)^T$ ein Eigenvektor zu λ_2.

Die richtige Antwort ist somit e).

Aufgabe 3.1: (M: −1, P: 3)

Bestimmen Sie die Polarkoordinatendarstellung von $z = -2 - 2\sqrt{3}i$.
Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} -2 - 2\sqrt{3}i &= 4 \cdot (-1) \cdot (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) \\ &\overset{\text{Tabelle}}{=} 4e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= 4e^{i\frac{4}{3}\pi}. \end{aligned}$$

Also ist a) die richtige Antwort.

Aufgabe 3.2: (M: −1, P: 3)

Bestimmen Sie die kartesischen Koordinaten von $z = e^{i\frac{3}{4}\pi} \cdot e^{i\frac{13}{12}\pi}$.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} e^{i\frac{3}{4}\pi} \cdot e^{i\frac{13}{12}\pi} &= e^{i\frac{11}{6}\pi} \\ &= e^{i(-\frac{1}{6}\pi)} \\ &= \overline{e^{i\frac{1}{6}\pi}} \\ &\overset{\text{Tabelle}}{=} \overline{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

Also ist c) die richtige Antwort.

Aufgabe 3.3: (M: 0, P: 4)

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $z = \left(\frac{2-i}{i} + 2 + i\right)^2$.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{2-i}{i} + 2 + i\right)^2 &= \left(\frac{(2-i) + i(2+i)}{i}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1+i}{i}\right)^2 \\ &= -(1+i)^2 \\ &= -2i. \end{aligned}$$

Demnach ist $\mathrm{Re}(z) = 0$ und $\mathrm{Im}(z) = -2$.

Aufgabe 3.4: (M: 0, P: 4)

Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^5 = -1$.

Lösung: Es sei $w = -1 = e^{i\pi}$. Nach der Formel von de Moivre sind

$$z_k = \sqrt[5]{|w|} e^{i \frac{\arg w + 2k\pi}{5}},$$

wobei $k = 0, 1, 2, 3, 4$, die Lösungen der Gleichung. Da $|w| = 1$ und $\arg(z) = \pi$ gilt also

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{i\frac{1}{5}\pi}, & z_1 &= e^{i\frac{3}{5}\pi}, \\ z_2 &= e^{i\pi}, & z_3 &= e^{i\frac{7}{5}\pi}, \\ z_4 &= e^{i\frac{9}{5}\pi}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4.1: (M: 0, P: 4)

Bestimmen Sie die Nullstellen von $p(z) = z^3 + (1+i)z^2 + (i-6)z - 6i$ in den komplexen Zahlen. (Mehrfachantworten möglich.)

Lösung: Wir bestimmen die Nullstelle $z = -i$ durch Ausprobieren. Durch Polynomdivision berechnen wir dann, dass

$$p(z) = (z+i)(z^2+z-6).$$

Weiter gilt

$$z^2 + z - 6 = 0 \Leftrightarrow z = -3 \text{ oder } z = 2.$$

Die richtigen Antworten sind somit d), e) und k)

Aufgabe 4.2: (M: −2, P: 6)

Bestimmen Sie alle möglichen Jordan-Normalformen einer Matrix mit charakteristischem Polynom $p(\lambda) = (1-\lambda)^4(2-\lambda)$ (bis auf Permutation).

Lösung: Da das Minimalpolynom ein Teiler des charakteristischen Polynoms ist und alle Linearfaktoren enthält, gibt es für das Minimalpolynom m der Matrix die Möglichkeiten

$$\begin{aligned} m(\lambda) &= (1-\lambda)(2-\lambda), & m(\lambda) &= (1-\lambda)^2(2-\lambda),\\ m(\lambda) &= (1-\lambda)^3(2-\lambda), & m(\lambda) &= (1-\lambda)^4(2-\lambda). \end{aligned}$$

Im ersten, dritten und vierten Fall ist die Jordan-Normalform eindeutig bestimmt durch $\operatorname{diag}(1,1,1,1,2)$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Im zweiten Fall haben wir die Möglichkeiten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt gibt es also fünf Möglichkeiten.

Aufgabe 4.3: (M: -2, P: 6)

Wählen Sie aus den Vektoren eine Basis des Lösungsraumes des folgenden linearen Differentialgleichungssystems aus.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= & -x(t) & + & y(t) & & \\ \dot{y}(t) &= & & & -y(t) & + & z(t) \\ \dot{z}(t) &= & & & & & -z(t) \end{cases}$$

Lösung: Es sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ die das System definierende Matrix. Die Matrix ist bereits in Jordan-Normalform. Die Spalten der Matrix

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & \\ & e^{-t} & te^{-t} \\ & & e^{-t} \end{pmatrix}$$

bilden also eine Basis des Lösungsraumes für das System $\dot{x} = Ax$. Die richtige Antwort ist also b), g) und h).

Aufgabe 5.1: (M: 0, P: 8)

Formulieren Sie das folgende Problem in der Standardform

$$(\mathrm{S}) = \begin{cases} \min\ c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Eine Maschine produziert zwei Produkte P_1 und P_2 aus zwei Rohstoffen R_1 und R_2. Die Herstellung von P_1 verbraucht zwei Einheiten R_1 und drei Einheiten R_2, die von P_2 vier Einheiten R_1 und eine Einheit R_2. Es stehen 100 Einheiten R_1 und 150 Einheiten R_2 zur Verfügung. Der Verdienst bei Produkt P_1 beträgt 6 Euro pro Stück, der bei P_2 8 Euro pro Stück. Welche Stückzahlen der Produkte maximieren den Verdienst?

Lösung: Mit $x = (x_1, x_2)^T$ kann das Problem kann wie folgt modelliert werden.

$$(\mathrm{P}) = \begin{cases} \max\ 6x_1 + 8x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 100 \\ 3x_1 + x_2 \leq 150 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max\ (6,8)x \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Durch Einfügen der Schlupfvariablen x_3, x_4 kann (P) auf die folgende Standardform gebracht werden (dabei ist $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$).

$$\begin{cases} \min\ (-6, -8, 0, 0)x \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

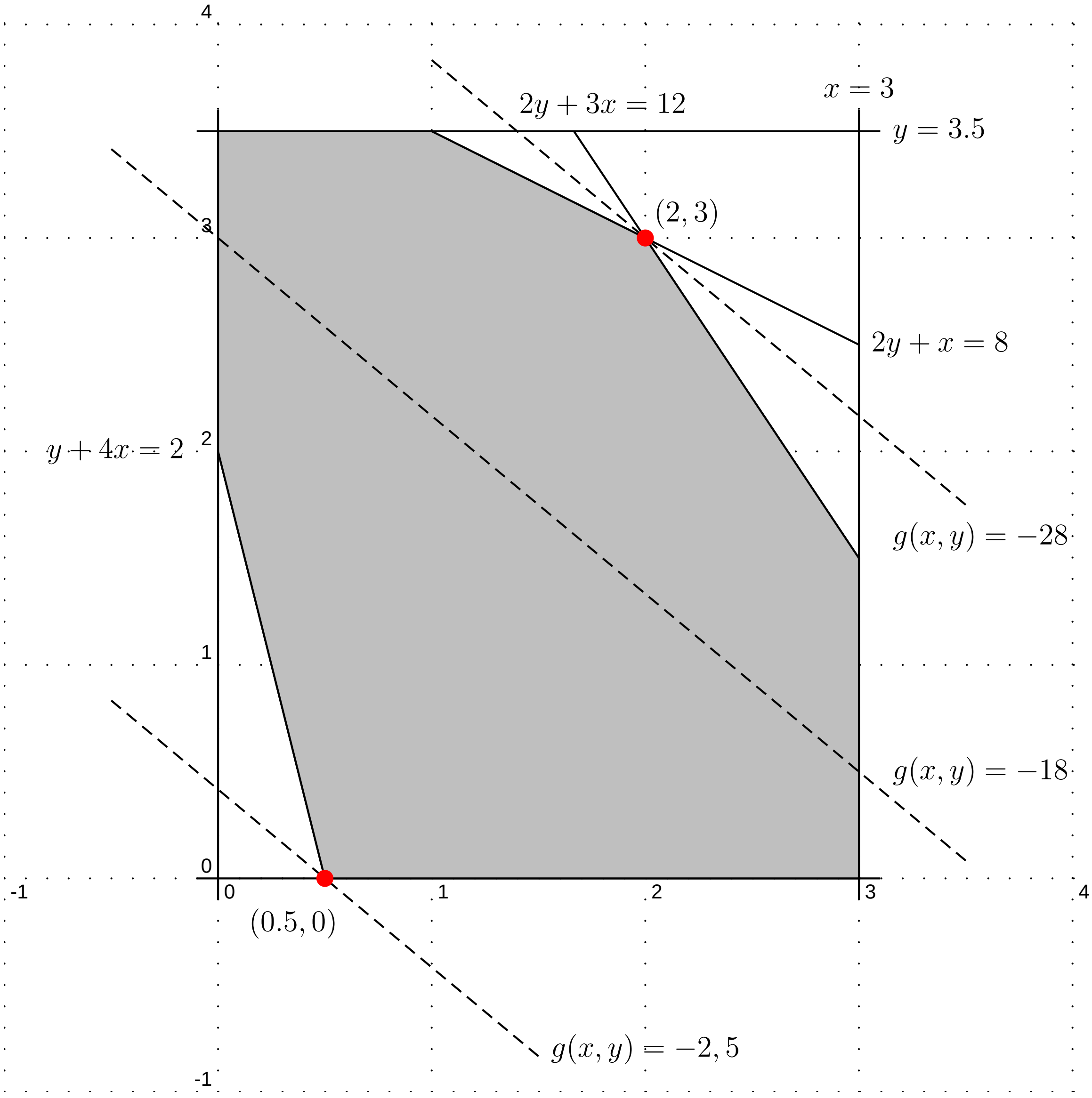
Aufgabe 5.2: (M: −2, P: 4)

Gegeben seien die Funktion $g(x,y) = -5x - 6y$ und die Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ aller Punkte (x,y) mit

$$x + 2y \leq 8, \quad 3x + 2y \leq 12, \quad 4x + y \geq 2, \quad 0 \leq 5x \leq 15, \quad 0 \leq 2y \leq 7.$$

Skizzieren Sie B und markieren Sie die Punkte, für die $g(x,y)$ den maximalen und minimalen Wert annimmt.

Lösung:


4
3
2
1
0
-1
-1
0
1
2
3
4
$x = 3$
$2y + 3x = 12$
$y = 3.5$
$(2, 3)$
$2y + x = 8$
$y + 4x = 2$
$g(x, y) = -28$
$g(x, y) = -18$
$(0.5, 0)$
$g(x, y) = -2,5$

Aufgabe 6.1: (M: −2, P: 2)

Die Drehachse der Drehmatrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist die Gerade $\{(0,0,\lambda)^T : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Lösung: Ja. Die Drehachse ist der Eigenvektor von A zum Eigenwert 1. Dieser ist offensichtlich $(0,0,1)^T$.

Aufgabe 6.2: (M: −2, P: 2)

Es gibt keine komplexe Zahl z, die die Gleichungen $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 1$ und $\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Re}(z) = -1$ erfüllt.

Lösung: Nein. Die Zahl $z = 1$ ist eine (sogar die einzige) Lösung beider Gleichungen.

Aufgabe 6.3: (M: −2, P: 2)

Jede quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist trigonalisierbar, d.h. es existiert eine invertierbare Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sodass $B^{-1}AB$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Lösung: Ja (Satz aus der Vorlesung).

Aufgabe 6.4: (M: −2, P: 2)

Die Jordan-Normalform einer (4×4)-Matrix mit charakteristischem Polynom $(t-1)^2(t+1)^2$ und Minimalpolynom $(t-1)^2(t+1)$ ist (bis auf Permutation) eindeutig bestimmt.

Lösung: Ja, durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.5: (M: -2, P: 2)

Gegeben sei ein lineares Optimierungsproblem in Standardform

$$(\mathrm{S}) = \begin{cases} \min \; c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Ist $c^T x$ minimal, so ist x eine Ecke des durch die Nebenbedingungen beschriebenen Polytops.

Lösung: Nein. Wir betrachten das Problem

$$(\mathrm{P}) = \begin{cases} \min \; -x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} .$$

Die Zielfunktion $-x_1 - x_2$ ist minimal für $x_1 + x_2 = 1$, $x_1, x_2 \geq 0$, aber nur $(1,0)$ und $(0,1)$ sind Ecken des Polytops.