Aufgabe 1: (15 Punkte)

Bestimmen Sie Normalform, Typ und Lage (d.h. die zugehörige Transformationsmatrix) der folgenden Kurve 2. Ordnung im $\mathbb{R}^2$ in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$:

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : -2x_1^2 - 5x_2^2 + 4x_1x_2 + 12x_1 + 6x_2 + c = 0\}.$$

Lösung: Mit $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ und $b^T = (6, 3)$ ist

$$\begin{aligned} K &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : -2x_1^2 - 5x_2^2 + 4x_1x_2 + 12x_1 + 6x_2 + c = 0\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + 2b^T\mathbf{x} + c = 0\}. \end{aligned}$$

1. Schritt: Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathrm{Id}) &= \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & -5-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-2-\lambda)(-5-\lambda) - 2^2 \\ &= \lambda^2 + 7\lambda + 6 \\ &= (\lambda + 6)(\lambda + 1). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = -6$ und $\lambda_2 = -1$.

2. Schritt: Wir berechnen die Eigenvektoren von A.

a) Zu $\lambda_1 = -6$: Wir lösen das lineare Gleichungssystem $(A + 6\mathrm{Id})v = 0$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Also ist der Vektor $v_1 = (-1, 2)^T$ ein Lösungsvektor.

b) Zu $\lambda_2 = -1$: Der Eigenvektor muss senkrecht auf v_1 stehen, also ist der Vektor $v_2 = (2, 1)^T$ ein Eigenvektor zu λ_2.

3. Schritt: Wir bestimmen die Lösung von $Am = -b$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & -6 \\ 2 & -5 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Also ist $m = (6, 3)^T$ die eindeutig bestimmte Lösung.

4. Schritt: Mit der Substitution $\mathbf{x} = V\mathbf{y} + m$, wobei

$$V = \left(\frac{v_1}{|v_1|}, \frac{v_2}{|v_2|}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir die Normalform

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \gamma = 0.$$

Dabei ist

$$\gamma = b^T m + c = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + c = 45 + c$$

und somit ergibt sich die Normalform zu

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \gamma = -6y_1^2 - y_2^2 + 45 + c = 0.$$

5. Schritt:

a) Ist $c = -45$, so erhalten wir die Gleichung

$$-6y_1^2 - y_2^2 = 0,$$

welche einen Punkt beschreibt.

b) Ist $c > -45$, so erhalten wir die Gleichung

$$-6y_1^2 - y_2^2 + d = 0,$$

wobei $d > 0$. Diese Gleichung beschreibt eine Ellipse.

c) Ist $c < -45$, so erhalten wir die Gleichung

$$-6y_1^2 - y_2^2 + d = 0,$$

wobei $d < 0$. Diese Gleichung ist nicht lösbar, beschreibt also die leere Menge.

Aufgabe 2.1: (M: -2, P: 6)

Bestimmen Sie den Typ der Kurve

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1 + 4x_2 + 1 = 0\}.$$

Lösung: Mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $b^T = (2, 2)$ ist

$$\begin{aligned} K &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1 + 4x_2 + 1 = 0\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + 2b^T\mathbf{x} + 1 = 0\}. \end{aligned}$$

Um den Typ zu bestimmen, berechnen wir die Eigenwerte von A. Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathrm{Id}) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(1-\lambda) - 1^2 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda \\ &= \lambda(\lambda - 2). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$. Die Normalform von K ist demnach

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \gamma = 2y_2^2 + b^T m + c = 2y_2^2 + (2, 2)m + 1 = 0.$$

Nun bestimmen wir die Lösung von $Am = -b$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & -2 \\ 1 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\{(-2 - t, t)^T : t \in \mathbb{R}\}$ die Lösungsmenge. Eingesetzt in die Normalform erhalten wir

$$2y_2^2 - 4 + 1 = 2y_2^2 - 3 = 0.$$

Diese Gleichung beschreibt ein paralleles Geradenpaar. Die richtige Antwort ist also e).

Aufgabe 2.2: (M: -1, P: 3)

Wie lautet der Scheitelpunkt der Kurve

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : -2x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_2 + 3 = 0\}?$$

Lösung: Mit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $b^T = (0, 2)$ ist

$$\begin{aligned} K &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : -2x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_2 + 3 = 0\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + 2b^T\mathbf{x} + 3 = 0\}. \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt ist die Lösung von $Am = -b$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & | & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & | & -4 \end{pmatrix}.$$

Demnach ist die eindeutig bestimmte Lösung $m = (2, 4)^T$, also Antwort c).

Aufgabe 2.3: (M: -2, P: 8)

Wie lauten die Hauptachsen der Kurve

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 6x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 = 0\}?$$

Lösung: Mit $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ und $b^T = (1, 1)$ ist

$$\begin{aligned} K &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 6x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 = 0\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + 2b^T\mathbf{x} = 0\}. \end{aligned}$$

Die Hauptachsen sind die Eigenvektoren von A. Wir berechnen also zunächst die Eigenwerte von A. Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathrm{Id}) &= \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (6-\lambda)(3-\lambda) - (-2)^2 \\ &= \lambda^2 - 9\lambda + 14 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 7). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 7$. Jetzt berechnen wir die Eigenvektoren von A.

a) zu $\lambda_1 = 2$: wir lösen das lineare Gleichungssystem $(A - 2\mathrm{Id})v = 0$.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & | & 0 \\ -2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist der Vektor $v_1 = (1, 2)^T$ ein Lösungsvektor.

b) zu $\lambda_2 = 7$: der Eigenvektor muss senkrecht auf v_1 stehen, also ist der Vektor $v_2 = (2, -1)^T$ ein Eigenvektor zu λ_2.

Die richtige Antwort ist somit a).

Aufgabe 3.1: (M: -1, P: 3)

Bestimmen Sie die Polarkoordinatendarstellung von $z = 2 - 2i$.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} 2 - 2i &= 2\sqrt{2} \cdot (-1) \cdot i \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) \\ &\overset{\text{Tabelle}}{=} 2\sqrt{2} e^{i\pi} e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= 2\sqrt{2} e^{i\frac{7}{4}\pi}. \end{aligned}$$

Also ist f) die richtige Antwort.

Aufgabe 3.2: (M: -1, P: 3)

Bestimmen Sie die kartesischen Koordinaten von $z = 2\sqrt{3}e^{i\frac{4}{3}\pi}$.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3}e^{i\frac{4}{3}\pi} &= 2\sqrt{3}e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &\overset{\text{Tabelle}}{=} 2\sqrt{3} \cdot (-1) \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -\sqrt{3} - 3i. \end{aligned}$$

Also ist b) die richtige Antwort.

Aufgabe 3.3: (M: 0, P: 4)

Bestimmen Sie Real und Imaginärteil von $z = \left(\frac{i}{1+i} + \frac{1-i}{3i}\right)^{-1}$.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{i}{1+i} + \frac{1-i}{3i}\right)^{-1} &= \left(\frac{i(3i) + (1-i)(1+i)}{(1+i)3i}\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{3i^2 + 1 - i^2}{3i + 3i^2}\right)^{-1} \\ &= \frac{-3+3i}{-2+1} \\ &= 3 - 3i. \end{aligned}$$

Demnach ist $\mathrm{Re}(z) = 3$ und $\mathrm{Im}(z) = -3$.

Aufgabe 3.4: (M: 0, P: 4)

Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^4 = \sqrt{8} - \sqrt{8}i$.

Lösung: Es sei $w = \sqrt{8} - \sqrt{8}i$. Nach der Formel von de Moivre sind

$$z_k = \sqrt[4]{|w|} e^{i \frac{\arg w + 2k\pi}{4}},$$

wobei $k = 0, 1, 2, 3$, die Lösungen der Gleichung. Da $|w| = \sqrt{\sqrt{8}^2 + \sqrt{8}^2} = 4$ und $\arg(w) = \frac{7}{4}\pi$ gilt also

$$z_0 = \sqrt{2} e^{i \frac{7}{16}\pi}, \qquad z_1 = \sqrt{2} e^{i \frac{15}{16}\pi},$$
$$z_2 = \sqrt{2} e^{i \frac{23}{16}\pi}, \qquad z_3 = \sqrt{2} e^{i \frac{31}{16}\pi}.$$

Aufgabe 4.1: (M: 0, P: 4)

Faktorisieren Sie $p(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$ über den komplexen Zahlen.

Lösung: Wir bestimmen die Nullstelle $z = 1$ durch Ausprobieren. Durch Polynomdivision berechnen wir dann, dass

$$p(z) = (z-1)(z^2 - 2z + 2).$$

Weiter gilt

$$z^2 - 2z + 2 = (z^2 - 2z + 1) + 1 = (z-1)^2 - i^2 = (z - 1 + i)(z - 1 - i)$$

und somit

$$p(z) = (z-1)(z-1+i)(z-1-i).$$

Aufgabe 4.2: (M: −2, P: 4)

Welche der folgenden Matrizen sind diagonalisierbar? (Mehrfachantworten möglich)

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Lösung: Wir bezeichnen die Matrizen mit A_1, A_2 und A_3. Matrix A_1 liegt bereits in Jordan-Normalform vor, ist also nicht diagonalisierbar. Da Matrix A_3 eine obere Dreiecksmatrix ist, lassen sich ihre Eigenwerte 1, 2 und 3 an der Hauptdiagonalen ablesen. Diese sind paarweise verschieden, also ist A_3 diagonalisierbar. Nun berechnen wir die Eigenwerte von A_2. Da A_2 eine Blockmatrix ist, gilt

$$p_{A_2}(\lambda) = [(1-\lambda)(1-\lambda)-4](1-\lambda) = (\lambda^2 - 2\lambda - 3)(1-\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-3).$$

Also hat auch A_2 drei paarweise verschiedene Eigenwerte und ist demnach diagonalisierbar. Die richtigen Lösungen sind also b) und c)

Aufgabe 4.3: (M: −2, P: 6)

Wie viele Jordan-Normalformen einer (4×4)-Matrix mit Minimalpolynom $m(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$ gibt es (bis auf Permutation)?

Lösung: Da das Minimalpolynom ein Teiler des charakteristischen Polynoms ist und bereits alle möglichen Linearfaktoren enthält, gilt für das charakteristische Polynom p der Matrix entweder

$$p(\lambda) = (1-\lambda)^3(2-\lambda) \quad \text{oder} \quad p(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)^2.$$

Im ersten Fall ist die Jordan-Normalform eindeutig durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

bestimmt und im zweiten Fall ist sie eindeutig durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

bestimmt. Insgesamt gibt es also zwei Möglichkeiten, Antwort b) ist richtig.

Aufgabe 5.1: (M: 0, P: 8)

Bestimmen Sie eine Matrix, deren Spalten eine Basis des Lösungsraumes des folgenden linearen Differentialgleichungssystems bilden.

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) &= -2x_1(t) &+ 4x_2(t) \\ \dot{x_2}(t) &= 4x_1(t) &+ 4x_2(t) \end{cases}$$

Lösung: Es sei $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ die das System definierende Matrix.
1. Schritt: Wir bringen A auf Jordan-Normalform. Dazu berechnen wir zunächst die Eigenwerte von A. Es gilt

$$p_A(\lambda) = (-2-\lambda)(4-\lambda) - 4^2 = \lambda^2 - 2\lambda - 24 = (\lambda - 6)(\lambda + 4).$$

Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 6$ und $\lambda_2 = -4$. Nun berechnen wir den zu $\lambda_1 = 6$ gehörigen Eigenvektor.

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 & | & 0 \\ 4 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist der Vektor $v_1 = (1,2)^T$ ein Lösungsvektor. Als Eigenvektor zu λ_2 kann ein senkrecht auf v_1 stehender Vektor gewählt werden, z.B. $v_2 = (-2,1)^T$. Mit $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ gilt dann $B^{-1}AB = J_A = \begin{pmatrix} 6 & \\ & -4 \end{pmatrix}$.
2. Schritt: Die Spalten der Matrix

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{6t} & \\ & e^{-4t} \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis des Lösungsraumes für das System $\dot{y} = J_A y$.
3. Schritt: Die Spalten von

$$BY(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{6t} & \\ & e^{-4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{6t} & -2e^{-4t} \\ 2e^{6t} & e^{-4t} \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis des Lösungsraumes für das ursprüngliche System.

Aufgabe 5.2: (M: −2, P: 4)

Wählen Sie aus den Vektoren eine Basis des Lösungsraumes des folgenden linearen Differentialgleichungssystems aus.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= 2x(t) &+ y(t) & \\ \dot{y}(t) &= & 2y(t) & \\ \dot{z}(t) &= & & z(t) \end{cases}$$

Lösung: Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ die das System definierende Matrix. Die Matrix ist bereits in Jordan-Normalform. Die Spalten der Matrix

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \\ & e^{2t} & \\ & & e^t \end{pmatrix}$$

bilden also eine Basis des Lösungsraumes für das System $\dot{x} = Ax$. Die richtige Antwort ist also a), c) und g).

Aufgabe 6.1: (M: -2, P: 2)

Das Produkt der Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ beschreibt eine Drehung um den Nullpunkt um den Winkel $\frac{1}{2}\pi$.

Lösung: Nein. Die erste Matrix beschreibt eine Drehung um $\frac{1}{2}\pi$, die zweite eine Drehung um π. Das Produkt beschreibt also eine Drehung um $\frac{3}{2}\pi$.

Aufgabe 6.2: (M: -2, P: 2)

Nach Drehung des Punktes $\mathbf{P} = (0, 0, 1)$ um die Achse $(1, 0, 0)^T$ um den Winkel π erhält man den Punkt $\mathbf{P}'$. Dreht man $\mathbf{P}'$ um die Achse $(0, 1, 0)^T$ um den Winkel π, so erhält man wieder $\mathbf{P}$.

Lösung: Ja. Es gilt $\mathbf{P}' = (0, 0, -1)^T$ und somit erhält man nach der zweiten Drehung wieder $\mathbf{P}$.

Aufgabe 6.3: (M: -2, P: 2)

Die Lösungen der Gleichung $z^4 = 1$ in $\mathbb{C}$ sind die Ecken eines Quadrates mit Flächeninhalt 1.

Lösung: Nein. Die Lösungen der Gleichung $z^4 = 1$ in $\mathbb{C}$ sind zwar die Ecken eines Quadrates; der Flächeninhalt ist jedoch 2, da die Seitenlänge durch $|1 - i| = \sqrt{2}$ gegeben ist.

Aufgabe 6.4: (M: -2, P: 2)

Es seien p und q Polynome mit jeweils genau einer reellen Nullstelle. Haben diese Nullstellen die Vielfachheit eins, so hat das Produkt $p \cdot q$ geraden Grad.

Lösung: Ja. Das Produkt hat entweder genau eine reelle Nullstelle mit Vielfachheit zwei oder zwei reelle Nullstellen mit Vielfachheit eins. Da echt komplexe Nullstellen in Paaren auftreten, hat das Produktpolynom geraden Grad.

Aufgabe 6.5: (M: -2, P: 2)

Die Jordan-Normalform einer (3×3)-Matrix mit Minimalpolynom $(t - 1)(t - 2)$ ist (bis auf Permutation) eindeutig bestimmt.

Lösung: Nein. Die Matrix kann den doppelten Eigenwert 1 oder 2 haben. Also ist die Jordan-Normalform durch $\mathrm{diag}(1, 1, 2)$ oder $\mathrm{diag}(1, 2, 2)$ gegeben.