Aufgabe 1: (10 Punkte)

Gegeben seien $v_1 = (a, b, 1, 2)^\top$, $v_2 = (1, 2, c, d)^\top$, $v_3 = (1, -1, 1, -1)^\top$.
Berechnen Sie alle möglichen Kombinationen von $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sodass die Vektoren v_1, v_2 und v_3 paarweise senkrecht zu einander stehen und $|v_1| = 3\sqrt{2}$ gilt.

Lösung:
Paarweise senkrecht bedeutet:
Es gilt

$$\begin{aligned} < v_1, v_2 > &= a + 2b + c + 2d &= 0 \\ < v_1, v_3 > &= a - b + 1 - 2 &= 0 \\ < v_2, v_3 > &= 1 - 2 + c - d &= 0 \end{aligned}$$

Also gilt $a = b + 1$ und $c = d + 1$. Wegen

$$18 = |v_1|^2 = a^2 + b^2 + 1 + 4 = b^2 + 2b + 1 + b^2 + 5$$

folgt $b(b + 1) = \frac{18-6}{2} = 6$. Also gibt es zwei Möglichkeiten: $b = 2$ oder $b = -3$.

1. Fall $b = 2$: Es ist $a = 3$. Eingesetzt in die erste Gleichung folgt

$$3 + 2 \cdot 2 + (d + 1) + 2d = 0 \Rightarrow d = -\frac{8}{3}$$

und $c = 1 - \frac{8}{3} = -\frac{5}{3}$. Also $(a, b, c, d) = (3, 2, -\frac{5}{3}, -\frac{8}{3})$.

2. Fall $b = -3$: Es ist $a = -2$. Eingesetzt in die erste Gleichung folgt

$$-2 + 2 \cdot (-3) + (d + 1) + 2d = 0 \Rightarrow d = \frac{7}{3}$$

und $c = 1 + \frac{7}{3} = \frac{10}{3}$. Also $(a, b, c, d) = (-2, -3, \frac{10}{3}, \frac{7}{3})$.

Aufgabe 2: (10 Punkte)

$$\text{Sei } A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} & -\sqrt{6} & -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{6} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A eine Drehmatrix ist, und berechnen Sie die Drehachse.

Lösung:

$$\det(A) = \frac{(-2)\cdot(-\sqrt{2})\cdot 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6} - (-2)\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{6})\cdot 2\sqrt{2}}{64}$$

$$= \frac{8+24+8+24}{64} = 1.$$

$$AA^T = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4+12 & 2\sqrt{6}-2\sqrt{6} & -2\sqrt{6}+2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6}-2\sqrt{6} & 8+6+2 & 8-6-2 \\ -2\sqrt{6}+2\sqrt{6} & 8-6-2 & 8+6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A ist also eine Drehmatrix.

$$4(A-E) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} & -\sqrt{6}-4 & -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{6} & \sqrt{2}-4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} & -\sqrt{6}-4 & -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{6} & \sqrt{2}-4 \end{vmatrix} \xrightarrow[III\to III+1/\sqrt{2}\cdot I]{II\to II+1/\sqrt{2}\cdot I} \begin{vmatrix} -4 & -2 & 2\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{6}-4-\sqrt{2} & -\sqrt{2}+\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{6}-\sqrt{2} & \sqrt{2}-4+\sqrt{6} \end{vmatrix}$$

Da 1 ein Eigenwert ist, ist nun die letzte Zeile ein vielfaches der vorletzten und wir können sie $|0 \quad 0 \quad 0|$ setzen:

$$\to \begin{vmatrix} -4 & -2 & 2\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{6}-4-\sqrt{2} & -\sqrt{2}+\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Man kann aber auch ausrechnen, dass

$$(-\sqrt{6}-4-\sqrt{2})\cdot III = (\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot II$$

gilt, wegen

$$(-\sqrt{6}-4-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2}-4+\sqrt{6}) = -\sqrt{12}+4\sqrt{6}-6-4\sqrt{2}+16-4\sqrt{6}-2+4\sqrt{2}-\sqrt{12}$$

$$= 8-4\sqrt{3}$$

und

$$(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot(-\sqrt{2}+\sqrt{6}) = -\sqrt{12}+6+2-\sqrt{12} = 8-4\sqrt{3}.$$

Wähle nun $x_2 = 1$. Dann folgt

$$x_3 = \frac{\sqrt{2}+4+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}+4+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$$

$$= \frac{2+4\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+4\sqrt{6}+6}{4} = 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

und

$$x_1 = \frac{-2+2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}+4+\sqrt{6}}{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}}{4} = \frac{-2+2\sqrt{3}\cdot(2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})}{4}$$

$$= \frac{-1}{2}+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Die Drehachse hat also als einen Richtungsvektor den Vektor

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

(Wegen den komplizierten Rechnungen ergeben Rechenfehler bei der Drehachse nur geringe oder gar keine Abzüge.)

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Gegeben seien die Punkte

$$P_1 = (3,2,1),\ P_2 = (3,1,1),\ P_3 = (1,1,-1),\ P_4 = (1,1,1) \text{ und } P_5 = (2,2,2).$$

a) Sei g_1 die Gerade durch P_1 und P_2 und g_2 die Gerade durch P_3 und P_4. Berechnen sie den Abstand der Geraden.
b) Sei E die Ebene, die die Punkte P_1, P_2 und P_3 enthält. Berechnen sie den Abstand von P_5 zu E.
c) Berechnen Sie den Schnittpunkt von E und g_2.

Lösung:
a) Richtungsvektor von g_1 ist z.B. $P_1^\top - P_2^\top = (0,1,0)^\top$.
Richtungsvektor von g_2 ist z.B. $P_3^\top - P_4^\top = (0,0,-2)^\top$.
Sind nun

$$Q_1^\top = (3,1,1)^\top + \mu(0,1,0)^\top$$

der Lotfußpunkt auf g_1 und

$$Q_2^\top = (1,1,1)^\top + \nu(0,0,-2)^\top$$

der Lotfußpunkt auf g_2 des gemeinsamen Lotes und somit $Q_1^\top - Q_2^\top$ ein Abstandsvektor, so gelten die Gleichungen:

$$0 =< Q_1^\top - Q_2^\top, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} >=< Q_1^\top, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} > - < Q_2^\top, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} >= (1+\mu\cdot 1) - (1-\nu\cdot 0) = \mu$$

und

$$\begin{aligned} 0 =< Q_1^\top - Q_2^\top, \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} >&=< Q_1^\top, \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} > - < Q_2^\top, \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} > \\ &= (-2 + (-2)\mu\cdot 0) - ((-2) + (-2)\nu\cdot(-2)) = -4\nu. \end{aligned}$$

Also ist $\mu = 0$ und $\nu = 0$ und somit

$$Q_1^\top - Q_2^\top = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$$

und der Abstand ist $|Q_1^\top - Q_2^\top| = 2$.

b) Ein Normalenvektor der Ebene E ist

$$(P_1^\top - P_2^\top) \times (P_2^\top - P_3^\top) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}.$$

Es gilt $\frac{(2,0,-2)^\top}{|(2,0,-2)^\top|} = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})^\top$. Wegen $< P_3^\top, (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})^\top >= \sqrt{2}$ folgt:

$$E :< x, (1/\sqrt{2}, 0, -1\sqrt{2})^\top >= \sqrt{2}.$$

Der Abstand zwischen E und P_5 ist:

$$| < (2,2,2)^\top, (-1/\sqrt{2}, 0, 1\sqrt{2})^\top > -\sqrt{2}| = \sqrt{2}.$$

c) Wegen $< (1,1,1)^\top, (-1/\sqrt{2}, 0, 1\sqrt{2})^\top >= 0$ liegt P_4 nicht in der Ebene. Also gibt es, wie in der Aufgabenstellung behauptet, genau einen Schnittpunkt, nämlich

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

da dieser nach Definition sowohl in E als auch auf g_2 liegt.

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Gegeben seien der Punkt $P = (6, 1)$ und die Gerade

$$g_1 : x = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie zwei Geraden g_2 und g_3 so, dass folgende 3 Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:
(1) g_2 und g_3 schneiden sich in P,
(2) g_2 steht senkrecht auf g_1 und
(3) die Schnittpunkte von je zwei der Geraden g_1, g_2 und g_3 sind die Eckpunkte eines Dreiecks mit Flächeninhalt 5.
Tipp: Machen Sie sich eine Skizze des Problems.

Lösung:
Wegen (2) ist $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor für g_2 ($< \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} >= 0$).
Wegen (1) lautet die Gleichung für g_2 also:

$$g_2 : x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Außerdem gilt für den Schnittpunkt Q von g_1 und g_2:

$$Q^\top = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu_Q \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu_Q \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also folgt mit $\mu_Q \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \nu_Q \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, dass

$$\mu_Q = 2 - 3\nu_Q \Rightarrow 3(2 - 3\nu_Q) - \nu_Q = -4 \Rightarrow -10\nu_Q = -10$$

und somit $\nu_Q = 1$ und $\mu_Q = -1$ und

$$Q = (6 - 3, 1 + 1) = (3, 2).$$

Wegen (2) ist das Dreieck aus den Schnittpunkten rechtwinklig mit rechtem Winkel in Punkt Q. Die eine Kathete hat nach den Berechnungen die Länge

$$|P^\top - Q^\top| = \left| \begin{pmatrix} 6 - 3 \\ 1 - 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}.$$

Sei R der Schnittpunkt von g_1 und g_3. Dann gilt wegen (3)

$$\frac{|R^\top - Q^\top| \cdot |P^\top - Q^\top|}{2} = \frac{|R^\top - Q^\top| \cdot \sqrt{10}}{2} = 5,$$

also, da R auf g_1 liegt, mit $R^\top = (4, 5)^\top + \mu_R (1, 3)^\top$:

$$|R^\top - Q^\top| = \left| \mu_R \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 - 3 \\ 5 - 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

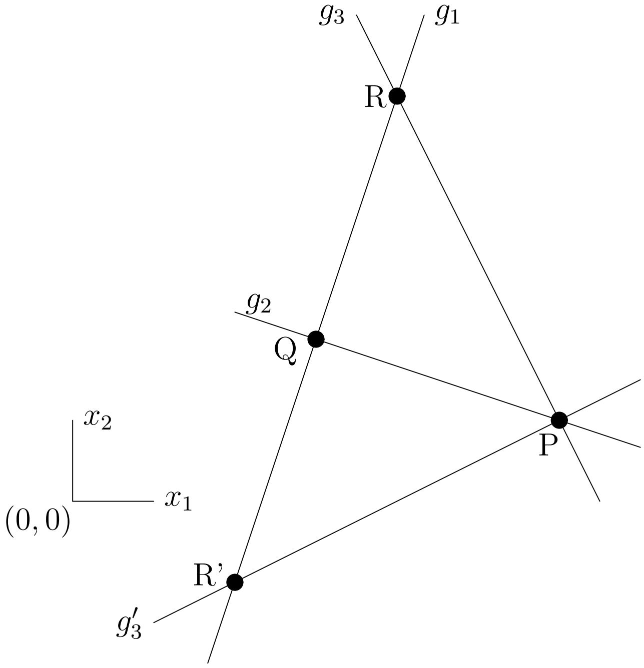
$\Rightarrow 10 = (\mu_R + 1)^2 + (3\mu_R + 3)^2 \Rightarrow 10 = \mu_R^2 + 2\mu_R + 1 + 9\mu_R^2 + 18\mu_R + 9 \Rightarrow 0 = 10\mu_R(\mu_R + 2).$

Also ist $\mu_R = 0$ oder $\mu_R = -2$ und man kann $R = (4, 5)$ oder $R' = (4 - 2, 5 - 6) = (2, -1)$ wählen. Mithin gibt es zwei Möglichkeiten für g_3:

$$g_3 : x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 - 4 \\ 1 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

oder

$$g_3' : x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 - 2 \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



Aufgabe 5: (10 Punkte)

Bestimmen Sie Typ und Normalform der folgenden Kurve im $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 5\sqrt{2}x_1 - 5\sqrt{2}x_2 - 20 = 0.$$

Skizzieren Sie die Kurve. Wie lautet die Formel zur Umrechnung der Normalformkoordinaten in x_1,x_2–Koordinaten?

Lösung:

Mit $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $b = \frac{5}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ und $c = -20$ ist die Gleichung äquivalent zu

$$x^\top Ax + 2b^\top x + c = 0.$$

Die Eigenwerte von A sind wegen

$$\det(A - \lambda E) = (\frac{1}{2} - \lambda)(\frac{1}{2} - \lambda) - \frac{1}{4} = \lambda(\lambda - 1)$$

also $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 1$. Die zugehörigen normierten Eigenvektoren sind

$$\lambda_1 = 0 : \ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$

und

$$\lambda_2 = 1 : \ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Die Gleichung $Am = -b$ ist wegen

$$\left(\begin{array}{cc|c}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\sqrt{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2}\sqrt{2}\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & -5\sqrt{2}\\ 0 & 0 & 10\sqrt{2}\end{array}\right)$$

nicht lösbar. Die Gleichung stellt also eine Parabel dar, und wir müssen den Scheitelpunkt zusammen mit der Normalform berechnen:

Setze

$$V = (v_2|v_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

und $x = Vu$. Dann gilt

$$0 = x^\top Ax + 2b^\top x + c = u^\top V^\top AVu + 2b^\top Vu + c$$

$$= u_1^2 + 5\begin{pmatrix}1-1, & -1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix} - 20 = u_1^2 - 10u_2 - 20 = u_1^2 - 10(u_2 + 2).$$

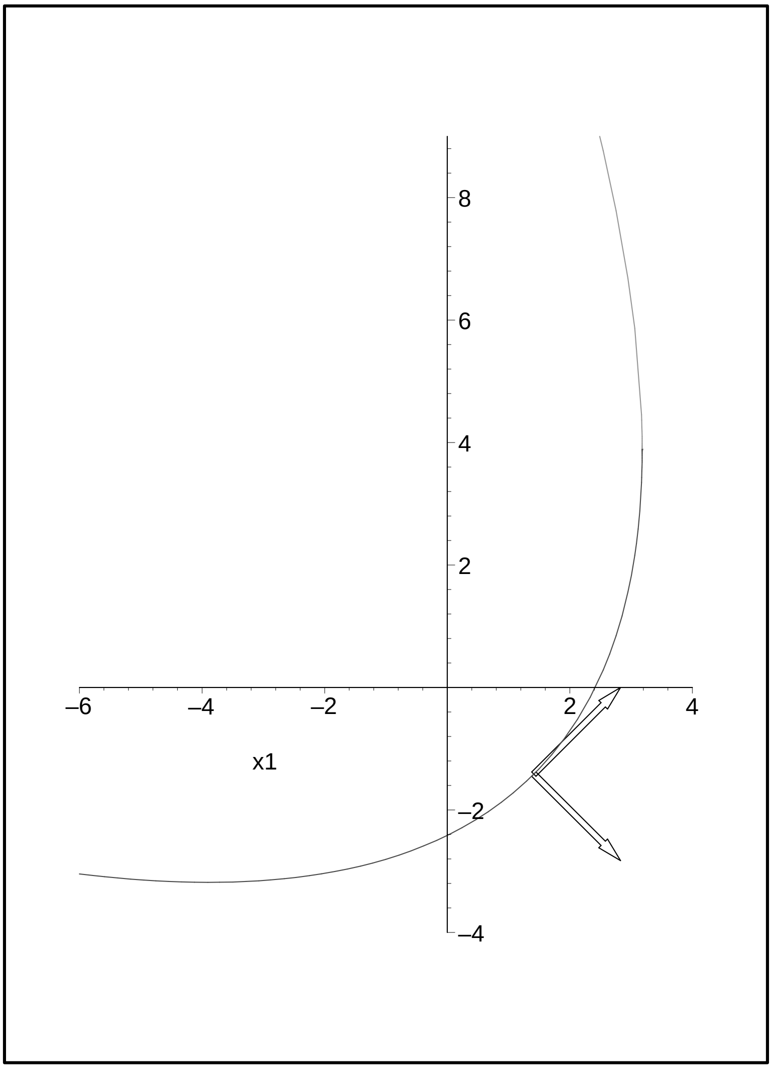
Setze $z_1 = u_1$ und $z_2 = u_2 + 2$. Also $z = u + (0, 2)^\top \Rightarrow u = z - (0, 2)^\top$. Dann ist die Normalform

$$z_1^2 - 10z_2 = 0.$$

Die Transformationsformel ist mit $z = (z_1, z_2)^\top$:

$$x = Vu = V\left(z - \begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} z + \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

Der Scheitelpunkt liegt bei $z = 0$: $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.



8
6
4
2
–2
–4
–6
–4
–2
2
4
x1

Aufgabe 6: (10 Punkte)

Wie lautet die Normalform eines Zylinders im $\mathbb{R}^3$ mit Radius 42? In welche Richtung verläuft die Achse des Zylinders? Berechnen Sie die Gleichung eines Zylinders mit Radius 42, für den die Gerade

$$g : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die Achse ist.

Lösung:

Die Gleichung eines Kreises mit Radius 42 ist

$$\xi^2 + \eta^2 = 42^2.$$

Die Normalform im $\mathbb{R}^3$ des Zylinders entsteht durch das Zulassen beliebiger Werte in u_3–Richtung, also hat u_3 keinen Einfluß auf die Gleichung:

$$u_1^2 + u_2^2 - 42^2 = 0 = u^\top Du - 42^2,$$

wobei $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Somit ist die Achse des Zylinders die u_3–Achse, also

$$\hat{g} : u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{\mu} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

---

1) Lösung mit Koordinatentransformation:

Betrachten wir nun eine Koordinatentransformation

$$x = Vu + m,$$

wobei V orthonormiert, genauer eine Drehmatrix sein soll. Wir wollen $\hat{g}$ auf g abbilden. Daher setzen wir ein:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x = Vu + m = \hat{\mu} V \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + m.$$

Damit diese Gleichung für alle μ gilt, müssen die konstanten Terme gleich sein, also

$$m = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt $\mu \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \hat{\mu} V \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. V ist eine Drehmatrix, also hat $V \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ die selbe Länge wie $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Es folgt

$$|\mu| = |\mu \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}| = |\hat{\mu} V \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}| = \hat{\mu} |V \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}| = |\hat{\mu}|,$$

also $\mu = \pm\hat{\mu}$. Wir können wählen und setzen $\mu = \hat{\mu}$. Somit

$$V \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Das bedeutet aber, V hat die Form

$$V = \left(v_1 \middle| v_2 \middle| \begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix} \right).$$

Wir setzen etwa $v_1 = (0,0,-1)^\top$ und $v_2 = (0,1,0)^\top$, also

$$V = \begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

offenbar eine Drehmatrix. Die Transformationsformel liefert $u = V^\top(x-m)$ und wir erhalten mit $A = VDV^\top = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}(x^\top - m^\top)VDV^\top(x-m) - 42^2 &= x^\top Ax - 2m^\top Ax + m^\top Am - 42^2\\ &= x_2^2 + x_3^2 - 2x_2 - 2x_3 - 42^2 + 2 = 0.\end{aligned}$$

---

2) Lösung durch praktische Anschauung:
Man kann aber auch argumentieren: Die Zylinderachse des zu bildenden Zylinders ist die x_1–Achse (entspricht dem Richtungsvektor $(1,0,0)^\top$). Der Kreis, der verschoben wird, hat in der x_2, x_3–Ebene den Radius 42 und den Mittelpunkt $(1,1)$ in dieser Ebene(!) (Projektion von $(1,1,1)$!). Also lautet die Kreisgleichung (entspricht der Zylindergleichung im $\mathbb{R}^3$!)

$$42^2 = (x_2-1)^2 + (x_3-1)^2 = x_2^2 + x_3^2 - 2x_2 - 2x_3 + 2,$$

woraus die Darstellung als Fläche zweiten Grades folgt.