Matrikel-Nr.: | | | | | |

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Lehrstuhl II für Mathematik

Bachelor-/Scheinklausur

Prüfung: Klausur zur Linearen Algebra II

Prüfer: Priv. Doz. H. Randerath

Termin: 13.08.08

Studiengang: ....

Abschluss:

Bachelor ◯ Diplom ◯

Sonstige: ....

Name: ....

Unterschrift: ....

Zeitrahmen: 90 Minuten. Die Klausur gilt ab 33 Punkten von 83 Punkten als bestanden.

- Teillösungen werden bewertet.
- *(M: -4/ P: 6)* bedeutet, dass in der Aufgabe maximal 6 Punkte erreicht werden können und maximal 4 Punkte abgezogen werden.
- Minuspunkte zählen nicht über Aufgabengrenzen hinweg.
- **Hilfsmittel**: Als Hilfsmittel sind lediglich fünf handbeschriebene Blätter (keine Ausdrucke oder Fotokopien) sowie die vom Lehrstuhl herausgegebene Übersicht über Kurven und Flächen 2. Ordnung erlaubt. Weitere Hilfsmittel (insbesondere Taschenrechner) sind **nicht** erlaubt.

Nr.	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							
Vorkorrektur							

Gesamtpunktzahl: .... Note: .... Unterschrift: ....

Aufgabe 1: (15 Punkte)

Bestimmen Sie eine Matrix deren Spalten eine Basis des Lösungsraumes des folgenden linearen Differentialgleichungssystems bilden:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & x(t) & & & + & z(t) \\ \dot{y}(t) & = & -2x(t) & + & 2y(t) & + & 6z(t) \\ \dot{z}(t) & = & & & & & z(t) \end{cases} .$$

Bitte benutzen Sie zur Beantwortung der Multiple Choice Aufgaben die vorliegenden Blätter.

2

Quadriken

Bestimmen Sie den Typ der Kurve

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - 4x_2^2 - 12x_1x_2 + 2x_1 + 28x_2 - 10 = 0\}.$$

a) Ellipse b) Hyperbel c) Hyperboloid

d) paralleles Geradenpaar e) leere Menge f) Gerade

◯ a) ◯ d)
◯ b) ◯ e)
◯ c) ◯ f)

(M: -2/P: 6)

Wie lauten die Hauptachsen der Kurve

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : -2x_1^2 - 2x_2^2 - 12x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 = 0\}?$$

a) $\{(1,1)^T, (-1,-1)^T\}$ b) $\{(1,0)^T, (0,1)^T\}$ c) $\{(1,-1)^T, (-1,1)^T\}$

d) $\{(1,0)^T, (1,-1)^T\}$ e) $\{(1,1)^T, (1,-1)^T\}$ f) $\{(1,2)^T, (2,-1)^T\}$

g) $\{(-1,2)^T, (2,-1)^T\}$ h) $\{(1,2)^T, (2,1)^T\}$

◯ a) ◯ e)
◯ b) ◯ f)
◯ c) ◯ g)
◯ d) ◯ h)

(M: -2/P: 8)

3

Komplexe Zahlen

Bestimmen Sie die Polarkoordinatendarstellung von $z = -2 - 2\sqrt{3}i$.

a) $4e^{i\frac{4}{3}\pi}$ b) $4e^{i\frac{3}{4}\pi}$ c) $2e^{i\frac{1}{3}\pi}$

d) $2e^{-i\frac{4}{3}\pi}$ e) $4e^{\frac{4}{3}\pi}$ f) $2e^{-i\frac{3}{4}\pi}$

◯ a) ◯ d)
◯ b) ◯ e)
◯ c) ◯ f)

(M: -1/P: 3)

Bestimmen Sie die kartesischen Koordinaten von $z = e^{i\frac{3}{4}\pi} \cdot e^{i\frac{13}{12}\pi}$.

a) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ b) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4 + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

d) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4 + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ f) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4 + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$

◯ a) ◯ d)
◯ b) ◯ e)
◯ c) ◯ f)

(M: -1/P: 3)

(M: 0/P: 4)

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $z = \left(\frac{2-i}{i} + 2 + i\right)^2$.

(M: 0/P: 4)

Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^5 = -1$.

4

Polynome, Jordan-Normalform und lineare Differentialgleichungssyteme

Bestimmen Sie die Nullstellen von

$$p(z) = z^3 + (1+i)z^2 + (i-6)z - 6i$$

in den komplexen Zahlen. (Mehrfachantworten möglich.)

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$ e) 2 f) -2
g) $2i$ h) $-2i$ j) 3 k) -3 l) $3i$ m) $-3i$

◯ a) ◯ d)
◯ b) ◯ e)
◯ c) ◯ f)
◯ g) ◯ h)
◯ j) ◯ k)
◯ l) ◯ m)

(M: -2/P: 4)

Bestimmen Sie alle möglichen Jordan-Normalformen einer Matrix mit charakteristischem Polynom

$$p(\lambda) = (1-\lambda)^4(2-\lambda)$$

(bis auf Permutation).

(M: 0/P: 6)

Wählen Sie aus den Vektoren eine Basis des Lösungsraumes des folgenden linearen Differentialgleichungssystems aus.

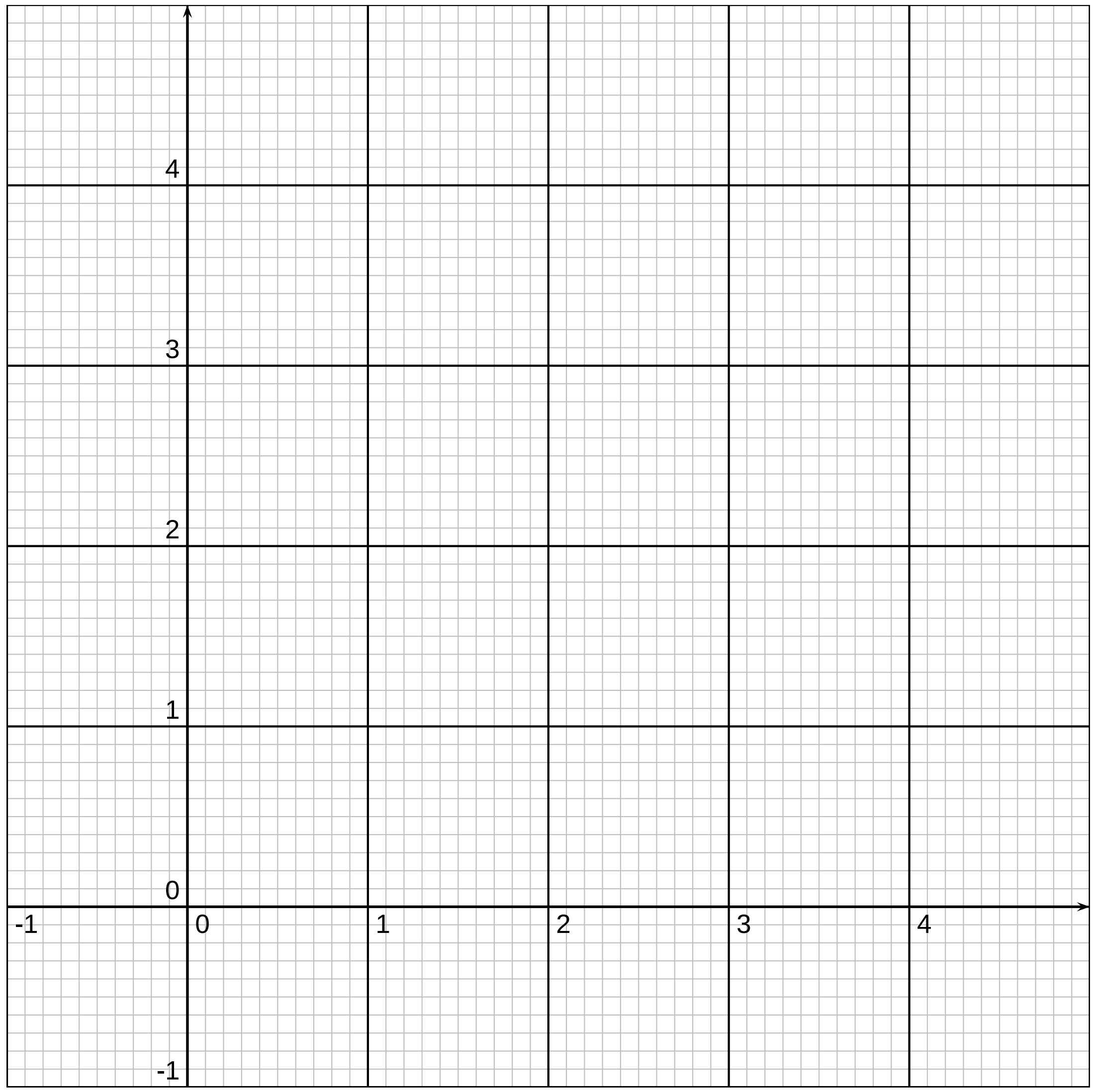
$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) &= -y(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) &= -z(t) \end{cases}$$

a) $(0, e^{-t}, 0)^T$ b) $(0, te^{-t}, e^{-t})^T$ c) $(te^{-t}, 0, 0)^T$ d) $(0, 0, e^{-t})^T$
e) $(0, e^{-t}, te^{-t})^T$ f) $(e^{-t}, 0, te^{-t})^T$ g) $(e^{-t}, 0, 0)^T$ h) $(te^{-t}, e^{-t}, 0)^T$

◯ a)
◯ b)
◯ c)
◯ d)
◯ e)
◯ f)
◯ g)
◯ h)

(M: -2/P: 6)

5	Lineare Optimierung	
	Formulieren Sie das folgende Problem in der Standardform $$(\mathrm{S}) = \begin{cases} \min\ c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}.$$ Eine Maschine produziert zwei Produkte P_1 und P_2 aus zwei Rohstoffen R_1 und R_2. Die Herstellung von P_1 verbraucht zwei Einheiten R_1 und drei Einheiten R_2, die von P_2 vier Einheiten R_1 und eine Einheit R_2. Es stehen 100 Einheiten R_1 und 150 Einheiten R_2 zur Verfügung. Der Verdienst bei Produkt P_1 beträgt 6 Euro pro Stück, der bei P_2 8 Euro pro Stück. Welche Stückzahlen der Produkte maximieren den Verdienst?	(M: 0/P: 6)
	Gegeben seien die Funktion $g(x,y) = -5x - 6y$ und die Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ aller Punkte (x,y) mit $$x + 2y \leq 8, \quad 3x + 2y \leq 12, \quad 4x + y \geq 2, \quad 0 \leq 5x \leq 15, \quad 0 \leq 2y \leq 7.$$ Skizzieren Sie B und markieren Sie die Punkte, für die $g(x,y)$ den maximalen und minimalen Wert annimmt. **Benutzen Sie dazu das Koordinatensystem auf der nächsten Seite.**	(M: 0/P: 8)


4
3
2
1
0
-1
-1
0
1
2
3
4

6	Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind.	
	Die Drehachse der Drehmatrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist die Gerade $\{(0,0,\lambda)^T : \lambda \in \mathbb{R}\}$.	◯ Ja ◯Nein (M: -2/P: 2)
	Es gibt **keine** komplexe Zahl z, die die Gleichungen $$\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=1 \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z)-\mathrm{Re}(z)=-1$$ erfüllt.	◯ Ja ◯Nein (M: -2/P: 2)
	Jede quadratische Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist trigonalisierbar, d.h. es existiert eine invertierbare Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sodass $B^{-1}AB$ eine obere Dreiecksmatrix ist.	◯ Ja ◯Nein (M: -2/P: 2)
	Die Jordan-Normalform einer (4×4)-Matrix mit charakteristischem Polynom $$(t-1)^2(t+1)^2$$ und Minimalpolynom $$(t-1)^2(t+1)$$ ist (bis auf Permutation) eindeutig bestimmt.	◯ Ja ◯Nein (M: -2/P: 2)
	Gegeben sei ein lineares Optimierungsproblem in Standardform $$(\mathrm{S}) = \begin{cases} \min\ c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$ Ist $c^T x$ minimal, so ist x eine Ecke des durch die Nebenbedingungen beschriebenen Polytops.	◯ Ja ◯Nein (M: -2/P: 2)