Matrikel-Nr.: | | | | | | |

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Lehrstuhl II für Mathematik

Bachelor-/Scheinklausur

Prüfung:	Klausur zur Linearen Algebra II
Prüfer:	Priv. Doz. H. Randerath
Termin:	12.07.08

Studiengang: . . . .

Abschluss:

Bachelor ◯ Diplom ◯

Sonstige: . . . .

Name: . . . .

Unterschrift: . . . .

Zeitrahmen: 90 Minuten. Die Klausur gilt ab 32 Punkten von 82 Punkten als bestanden.

- Teillösungen werden bewertet.
- *(M: -4/ P: 6)* bedeutet, dass in der Aufgabe maximal 6 Punkte erreicht werden können und maximal 4 Punkte abgezogen werden.
- Minuspunkte zählen nicht über Aufgabengrenzen hinweg.
- **Hilfsmittel**: Als Hilfsmittel sind lediglich fünf handbeschriebene Blätter (keine Ausdrucke oder Fotokopien) sowie die vom Lehrstuhl herausgegebene Übersicht über Kurven und Flächen 2. Ordnung erlaubt. Weitere Hilfsmittel (insbesondere Taschenrechner) sind **nicht** erlaubt.

Nr.	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							
Vorkorrektur							

Gesamtpunktzahl: . . . . Note: . . . . Unterschrift: . . . .

Aufgabe 1: (15 Punkte)

Bestimmen Sie Normalform, Typ und Lage (d.h. die zugehörige Transformationsmatrix) der folgenden Kurve 2. Ordnung im $\mathbb{R}^2$ in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$:

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : -2x_1^2 - 5x_2^2 + 4x_1x_2 + 12x_1 + 6x_2 + c = 0\}.$$

Bitte benutzen Sie zur Beantwortung der Multiple Choice Aufgaben die vorliegenden Blätter.

2

Quadriken

Bestimmen Sie den Typ der Kurve $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1 + 4x_2 + 1 = 0\}$.

a) leere Menge b) Gerade c) Parabel

d) Punkt e) paralleles Geradenpaar f) Ebene

◯ a) ◯ d)
◯ b) ◯ e)
◯ c) ◯ f)

(M: -2/P: 6)

Wie lautet der Scheitelpunkt der Kurve $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : -2x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_2 + 3 = 0\}$?

a) $(4,2)^T$ b) $(-8,4)^T$ c) $(2,4)^T$

d) $(8,-4)^T$ e) $(4,8)^T$ f) $(2,-4)^T$

◯ a) ◯ d)
◯ b) ◯ e)
◯ c) ◯ f)

(M: -1/P: 3)

Wie lauten die Hauptachsen der Kurve $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 6x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 = 0\}$?

a) $\{(2,-1)^T, (1,2)^T\}$ b) $\{(6,-2)^T, (-2,3)^T\}$ c) $\{(2,1)^T, (-1,2)^T\}$

d) $\{(1,2)^T, (-2,4)^T\}$ e) $\{(2,1)^T, (-1,-2)^T\}$ f) $\{(6,2)^T, (-2,-3)^T\}$

g) $\{(-2,-1)^T, (1,2)^T\}$ h) $\{(1,-2)^T, (2,4)^T\}$

◯ a) ◯ e)
◯ b) ◯ f)
◯ c) ◯ g)
◯ d) ◯ h)

(M: -2/P: 8)

3

Komplexe Zahlen

Bestimmen Sie die Polarkoordinatendarstellung von $z = 2 - 2i$.

a) $2e^{i\frac{3}{4}\pi}$ b) $4e^{i\frac{3}{4}\pi}$ c) $2\sqrt{2}e^{\frac{7}{4}\pi}$

d) $2e^{-i\frac{7}{4}\pi}$ e) $4e^{i\frac{7}{4}\pi}$ f) $2\sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi}$

◯ a) ◯ d)
◯ b) ◯ e)
◯ c) ◯ f)

(M: -1/P: 3)

Bestimmen Sie die kartesischen Koordinaten von $z = 2\sqrt{3}e^{i\frac{4}{3}\pi}$.

a) $\sqrt{3} - 3i$ b) $-\sqrt{3} - 3i$ c) $-2\sqrt{3} + i$

d) $\sqrt{3} - i$ e) $\frac{4}{3} + 2\sqrt{3}i$ f) $2 + \sqrt{3}i$

◯ a) ◯ d)
◯ b) ◯ e)
◯ c) ◯ f)

(M: -1/P: 3)

(M: 0/P: 4)

Bestimmen Sie Real und Imaginärteil von $z = \left(\frac{i}{1+i} + \frac{1-i}{3i}\right)^{-1}$.

(M: 0/P: 4)

Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^4 = \sqrt{8} - \sqrt{8}i$.

4	Polynome, Diagonalisierbarkeit & Jordan-Normalform	
	Faktorisieren Sie $p(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$ über den komplexen Zahlen.	(M: 0/P: 4)
	Welche der folgenden Matrizen sind diagonalisierbar? (Mehrfachantworten möglich) a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	○ a) ○ b) ○ c) ○ keine (M: -2/P: 4)
	Wie viele Jordan-Normalformen einer (4×4)-Matrix mit Minimalpolynom $m(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$ gibt es (bis auf Permutation)? a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6	○ a) ○ d) ○ b) ○ e) ○ c) ○ f) (M: -2/P: 6)
5	Lineare Differentialgleichungssysteme	
	Bestimmen Sie eine Matrix, deren Spalten eine Basis des Lösungsraumes des folgenden linearen Differentialgleichungssystems bilden. $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + 4x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 4x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases}$	(M: 0/P: 8)
	Wählen Sie aus den Vektoren eine Basis des Lösungsraumes des folgenden linearen Differentialgleichungssystems aus. $\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = 2y(t) \\ \dot{z}(t) = z(t) \end{cases}$ a) $(e^{2t}, 0, 0)^T$ b) $(e^{2t}, te^{2t}, 0)^T$ c) $(te^{2t}, e^{2t}, 0)^T$ d) $(0, 2te^{2t}, e^{2t})^T$ e) $(0, 0, e^{2t})^T$ f) $(e^t, 2e^t, te^{2t})^T$ g) $(0, 0, e^t)^T$ h) $(e^t, 0, 0)^T$	○ a) ○ b) ○ c) ○ d) ○ e) ○ f) ○ g) ○ h) (M: -2/P: 6)

6	Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind.	
	Das Produkt der Matrizen $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ beschreibt eine Drehung um den Nullpunkt um den Winkel $\frac{1}{2}\pi$.	◯ Ja ◯Nein (M: -2/P: 2)
	Nach Drehung des Punktes $\mathbf{P} = (0,0,1)$ um die Achse $(1,0,0)^T$ um den Winkel π erhält man den Punkt $\mathbf{P}'$. Dreht man $\mathbf{P}'$ um die Achse $(0,1,0)^T$ um den Winkel π, so erhält man wieder $\mathbf{P}$.	◯ Ja ◯Nein (M: -2/P: 2)
	Die Lösungen der Gleichung $z^4 = 1$ in $\mathbb{C}$ sind die Ecken eines Quadrates mit Flächeninhalt 1.	◯ Ja ◯Nein (M: -2/P: 2)
	Es seien p und q Polynome mit reellen Koeffizienten mit jeweils genau einer reellen Nullstelle. Haben diese Nullstellen die Vielfachheit eins, so hat das Produkt $p \cdot q$ geraden Grad.	◯ Ja ◯Nein (M: -2/P: 2)
	Die Jordan-Normalform einer (3×3)-Matrix mit Minimalpolynom $(t-1)(t-2)$ ist (bis auf Permutation) eindeutig bestimmt.	◯ Ja ◯Nein (M: -2/P: 2)