11. Übung Hypergraphen-Theorie

Aufgabe 1.
Sei H ein Hypergraph mit einer guten 3-Färbung. Zeigen Sie, dass H dann auch eine fast halbierende 2-Färbung besitzt. D.h. es gibt eine zulässige 2-Eckenfärbung mit den Farbklassen C_1 und C_2 mit $\left||C_1| - |C_2|\right| \leq 1$.

Aufgabe 2.
Sei H ein k-uniformer Hypergraph. Zeigen Sie:

a) Für $l \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq l \leq k$ gibt es eine gute l-Eckenfärbung von H, falls

$$\Delta(H) \leq \frac{1}{e \cdot l \cdot k} \left(\frac{l}{l-1}\right)^k.$$

b) Es gibt eine fast halbierende 2-Färbung von H, falls

$$\Delta(H) \leq \frac{1}{9k} \left(\frac{3}{2}\right)^k.$$

Aufgabe 3.
Sei H ein r-regulärer Hypergraph und $l \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) Falls $\Delta([H]_2) \leq \frac{1}{e} l^{r-1}$, so gibt es eine zulässige l-Kantenfärbung von H.

b) Falls $\Delta([H]_2) \leq \frac{1}{e \cdot l} \left(\frac{l}{l-1}\right)^r$, so gibt es eine gute Kantenfärbung von H mit $2 \leq l \leq r$ Farben.

Aufgabe 4.
Analysieren Sie die Maker-Breaker-Variante des 3^2-Spiels.

Aufgabe 5.
Gegeben sei das starke 4^2-Spiel. Zeigen Sie:

a) Es gibt eine Strategie, so dass Spieler 1 mindestens ein Unentschieden erreicht.

b) Für jeden möglichen ersten Zug von Spieler 1 gibt eine Strategie, so dass Spieler 2 mindestens ein Unentschieden erreicht.