10. Übung Hypergraphen-Theorie

Aufgabe 1.
Sei $H = (V, E)$ ein unimodularer Hypergraph, $d : E \to \mathbb{N}_0$ eine Kantengewichtsfunktion, $f : V \to \mathbb{N}$ und $p, q : V \to \mathbb{N}_0$ Eckengewichtsfunktionen mit $p(v) \geq q(v)$ für alle $v \in V$ und $\sum_{v \in e} p(v) \geq d(e)$ für alle $e \in E$.
Das Gewicht eines partiellen Hypergraphen $H' \subseteq H$ sei definiert durch

$$w(H') := \sum_{e \in E(H')} d(e) - \sum_{\substack{v \in V \\ \deg_{H'}(v) > f(v)}} (\deg_{H'}(v) - f(v))\, p(v) - \sum_{\substack{v \in V \\ \deg_{H'}(v) < f(v)}} (f(v) - \deg_{H'}(v))\, q(v).$$

Weiter bezeichne

$$X(H, d, p, q) := \left\{ x : V \to \mathbb{Z} \;\middle|\; \sum_{v \in e} x(v) \geq d(e)\ \forall e \in E \ \wedge\ -q(v) \leq x(v) \leq p(v)\ \forall v \in V \right\}$$

die Menge der verallgemeinerten Vertex Cover von H bezüglich d, p, q.
Zeigen Sie

$$\max_{H' \subseteq H} w(H') = \min_{x \in X(H,d,p,q)} \sum_{v \in V} x(v) f(v).$$

Aufgabe 2.
Sei $H = (V, E)$ ein Hypergraph und $d \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass H genau dann ein System verschiedener Repräsentanten für mindestens $|E| - d$ Kanten, falls

$$\left| \bigcup_{e \in E'} e \right| \geq |E'| - d$$

für alle $E' \subseteq E$ gilt.

Aufgabe 3.
Sei $H = (V, E)$ der Hypergraph zum n^d-Spiel. Zeigen Sie:

a) $|E| = \frac{(n+2)^d - n^d}{2}$.

b) Falls n ungerade, gilt $\Delta(H) = \frac{3^d - 1}{2}$ und es gibt genau eine Ecke v mit $\deg_H(v) = \Delta(H)$.

c) Falls n gerade, gilt $\Delta(H) = 2^d - 1$ und jede Ecke $v = (v_1, \ldots, v_d)$ mit $\deg_H(v) = \Delta(H)$ habt die Form $v_i = c$ oder $v_i = n + 1 - c$ für alle $1 \leq i \leq d$ und ein $c \in \{1, \ldots, n\}$.

d) Falls $n \geq 3^d - 1$ gilt, gibt es eine Paarungsstrategie für das n^d-Spiel.