9. Übung Hypergraphen-Theorie

Aufgabe 1.
Sei G ein schlichter Graph. Zeigen Sie unter Verwendung von Hypergraphen, dass G genau dann perfekt ist, wenn der Komplementärgraph $\overline{G}$ perfekt ist.

Aufgabe 2.
Sei $H = (V, E)$ ein normaler Hypergraph und $A \in \{0,1\}^{|V|\times|E|}$ die Inzidenzmatrix von H.

a) Zeigen Sie, dass das Polytop

$$P := \left\{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid Ax = \mathbf{1},\, x \geq \mathbf{0}\right\}$$

ganzzahlig ist. D.h. alle Eckpunkte von P liegen in $\mathbb{Z}^{|E|}$.
Bemerkung: $\mathbf{1}$ bzw. $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{|E|}$ bezeichnet den Vektor dessen Komponenten alle 1 bzw. 0 sind.

b) Folgern Sie daraus, dass das Matching-Polytop

$$P_M := \left\{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid Ax \leq \mathbf{1},\, x \geq \mathbf{0}\right\}$$

ganzzahlig ist.
Was bedeutet dies in Bezug auf die Komplexität des Matchingproblems für normale Hypergraphen?

Aufgabe 3.
Sei H ein normaler Hypergraph. Zeigen Sie, dass dann

$$\nu_d(H) = \tau_d(H)$$

für jede beliebige Kantengewichtsfunktion $d : E \to \mathbb{N}_0$ gilt.

Aufgabe 4.
Stellen Sie die Beziehungen der folgenden Hypergraphenklassen untereinander graphisch dar:

- unimodulare Hypergraphen,
- balancierte Hypergraphen,
- total balancierte Hypergraphen,
- normale Hypergraphen,
- Intervall-Hypergraphen,
- Hyperbäume.

Beweisen Sie die dargestellten Beziehungen.