8. Übung Hypergraphen-Theorie

Aufgabe 1.
Zeigen Sie, dass jeder total balancierte Hypergraph ein Hyperbaum ist.

Aufgabe 2.
Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit Farbklassen U und W. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

(1) $|N(X)| \geq |X|$ für alle $X \subseteq U$ oder $X \subseteq W$.

(2) Für alle $A, B \subseteq V$ mit $A \cap B = \emptyset$ und $|A| > |B|$ existiert ein $e \in E$ mit $|e \cap A| > |e \cap B|$.

Bemerkung: $N(X) := \{x \in V \setminus X \mid \text{es gibt } y \in X \text{ mit } xy \in E\}$ Nachbarschaft von X

Aufgabe 3.
Sei $H = (V, E)$ ein balancierter Hypergraph und d die Kantengewichtsfunktion mit $d(e) = |e|$ für alle $e \in E$.

a) Zeigen Sie, falls für $q \in \mathbb{N}$

$$\sum_{v \in V} (\Delta(H) - \deg_H(v)) \leq q \cdot \Delta(H) - 1$$

gilt, ist $\nu_d(H) \geq |V| - q + 1$.

b) Folgern Sie daraus eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines perfekten Matchings in H.

Aufgabe 4.
Sei $H = (V, E)$ ein balancierter Hypergraph, $d : E \to \mathbb{N}$ eine Kantengewichtsfunktion und $b : V \to \mathbb{N}$ eine Strafkostenfunktion. Zeigen Sie, dass für $q, r \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{\substack{v \in V \\ \deg_H(v) < r}} (r - \deg_H(v)) \left(\frac{1}{\deg_H(v)} \sum_{e \in E\colon v \in e} \frac{d(e)}{|e|} \right) + \sum_{\substack{v \in V \\ \deg_H(v) > r}} (\deg_H(v) - r)\, b(v) \leq qr - 1,$$

gibt es einen partiellen Subhypergraphen $H' \subseteq H$ mit

$$w(H') \geq \left(\sum_{v \in V} \frac{1}{\deg_H(v)} \sum_{e \in E\colon v \in e} \frac{d(e)}{|e|} \right) - q + 1.$$

Bemerkung: $w(H') := \sum_{e \in E(H')} d(e) - \sum_{v \in V(H')} (\deg_{H'}(v) - 1) b(v)$