7. Übung Hypergraphen-Theorie

Aufgabe 1.
Sei $H = (V, E)$ ein Hypergraph mit $\chi(H) > 2$ und $\mathrm{Rang}(H) \leq 3$.
Zeigen Sie, dass es in H einen B-Kreis gibt, in dem jedes Paar von nicht aufeinanderfolgenden Kanten disjunkt ist.

Aufgabe 2.
Zeigen Sie, dass die Hypergraphen in den folgenden Klassen unimodular sind.

a) Bipartite Multigraphen

b) Intervall-Hypergraphen

c) Hypergraphen, die Wege in einem orientieren Baum repräsentieren.
D.h. zu einem gegebenen Baum $T = (V, A)$ mit gerichteten Kanten sei der Hypergraph $H = (V, E)$ definiert durch $E = \{U \subseteq V | U \text{ ist gerichteter Weg in T}\}$.

d) Hypergraphen, die Kanten in den orientieren Wegen eines orientieren Baumes repräsentieren.
D.h. zu einem gegebenen Baum $T = (V, A)$ mit gerichteten Kanten sei der Hypergraph $H = (A, E)$ definiert durch $E = \{B \subseteq A | B \text{ ist gerichteter Weg in T}\}$.

Aufgabe 3.
Sei $H = (V, E)$ ein unimodularer Hypergraph. Zeigen Sie:

a) Falls $k \leq \min_{e \in E} |e|$, gibt es eine Partition der Knotenmenge $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k$, so dass jedes V_i ein Vertex Cover von H ist.

b) Falls $k \geq \mathrm{Rang}(H)$, besitzt H eine starke k-Färbung.