6. Übung Hypergraphen-Theorie

Aufgabe 1.
Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Graphen G die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) G ist 2-färbbar.

(2) G erhält keine Kreise ungerader Länge.

(3) Die Inzidenzmatrix von G ist vollstänig unimodular.

(4) Für jeden Teilgraphen $G' \subseteq G$ gilt $\nu(G') = \tau(G')$.

(5) Für jeden Teilgraphen $G' \subseteq G$ gilt $\chi'_{\text{schwach}}(G') = 2$, d.h. es gibt eine schwache Kantenfärbung von G' mit 2 Farben.

(6) Für jeden Teilgraphen $G' \subseteq G$ lässt sich $E(G')$ in $\Delta(G')$ disjunkte Matchings zerlegen.

Aufgabe 2.
Sei $A = (a_{ij}) \in \{0, 1, -1\}^{m \times n}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) A ist vollständig unimodular.

(2) Für jede Teilmenge $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ existiert eine Zerlegung $J = J^+ \cup J^-,\ J^+ \cap J^- = \emptyset$ mit

$$\left| \sum_{j \in J^+} a_{ij} - \sum_{j \in J^-} a_{ij} \right| \leq 1 \qquad \forall\, i = 1, \ldots, m.$$

Aufgabe 3.
Gegeben sei der Hypergraph $H = (V, E)$ durch

$$\begin{aligned} V =& \{1, \ldots, 12\}, \\ E =& \{\{1,2,5\}, \{1,2,6\}, \{2,3,5\}, \{2,6\}, \{3,4,7\}, \{3,5,7,8\}, \{5,6,7\}, \{5,6,8,9\}, \\ & \{5,7,8\}, \{7,11,12\}, \{8,9,10\}, \{9\}, \{10,12\}, \{11\}\}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die zyklomatische Zahl $\Lambda(H)$.