**Lehrstuhl II für Mathematik** http://www.math2.rwth-aachen.de
**Dr. R. Scheidweiler** **SoSe 2015**

# 2. Übung Hypergraphen-Theorie

**Aufgabe 1.**
Gegeben sei der vollständige Hypergraph $K_n$ mit Ordnung $n$. Eine Kette bzgl. „$\subseteq$“ von Kanten ($e_1 \subseteq e_2 \subseteq \ldots \subseteq e_k$) heißt symmetrisch, falls $|e_{i+1} \setminus e_i| = 1$ für alle $1 \leq i \leq k$ und $|e_1| = n - |e_k|$ gilt.
Zeigen Sie, dass sich die Kantenmenge von $K_n$ in disjunkte, symmetrische Ketten zerlegen lässt.

**Aufgabe 2.**
Zeigen Sie das folgende Resultat von Lovász.
Sei $H = (V, E)$ ein schlichter, $k$-uniformer Hypergraph mit $m(E) = \binom{x}{k}$ für ein $x \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$m([H]_{k-1}) \geq \binom{x}{k-1}.$$

Hinweis: Für $x \in \mathbb{R}$ definiert man $\binom{x}{k} := \frac{x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-k+1)}{k!}$.

**Aufgabe 3.**
Sei $l \in \mathbb{N}$ und $H = (V, E)$ ein schlichter, $k$-uniformer Hypergraph mit $|E| = \binom{l}{k}$, $k \leq l$. Dann gilt

$$m([H]_{k-1}) = \binom{l}{k-1} \quad \Leftrightarrow \quad E = \{e \subseteq A \,|\, |e| = k\}\,,\text{ für ein } A \subseteq V \text{ mit } |A| = l.$$

**Aufgabe 4.**
Sei $H = (V, E)$ ein schlichter Hypergraph der Ordnung $n$. Für $0 \leq k \leq n$ definieren wir $E_k := \{e \in E \,|\, |e| = k\}$ als die Menge der Kanten von $H$ mit Kardinalität $k$ und $H_k := (V, E_k)$.

a) Zeigen Sie

$$\frac{m\left([H_k]_{k-1}\right)}{\binom{n}{k-1}} \geq \frac{m(H_k)}{\binom{n}{k}}.$$

b) Zeigen Sie, dass Gleichheit genau dann gilt, falls $E_k = \emptyset$ oder $E_k = \{e \subseteq V \,|\, |e| = k\}$.

c) Folgern Sie die LYM-Ungleichung

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|E_k|}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$