1. Übung Hypergraphen-Theorie

Aufgabe 1.
Sei $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ und $H = (V, E)$ ein schlichter Hypergraph mit $|V| = n$ und Rang $r(H) = k$. Zeigen Sie

$$|E| \leq \binom{n}{k}.$$

Aufgabe 2.
Sei $H = (V, E)$ ein Hypergraph mit $|V| = n$ und der Eigenschaft, dass jede Folge von Kanten $(e_1 \supsetneq e_2 \supsetneq \dots)$ höchstens s Elemente enthält. Weiter sei a_k die Anzahl der Kanten mit Kardinalität k in E. Zeigen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq s.$$

Aufgabe 3.
Sei $H = (V, E)$ ein schlichter Hypergraph mit $|V| = n$ und für $e, f \in E$ gilt $e \cap f \neq \emptyset$ und $e \cup f \neq V$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$|E| \leq \binom{n-1}{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor}.$$

Hinweis: Es bezeichne $E^c := \{V \setminus e : e \in E\}$. Betrachten Sie zuerst das System $E \cup E^c$.

Aufgabe 4.
Gegeben sei ein 3-uniformer Hypergraph H auf $n\,(\geq 3)$ Ecken mit der Bedingung, dass jedes Paar verschiedener Ecken in genau einer Kante von H enthalten ist.

a) Zeigen Sie, dass dann $n \equiv 1$ oder $3 \pmod 6$ gilt.

b) Wie muss die notwendige Bedingung aus a) weiter eingeschränkt werden, wenn man zusätzlich verlangt, dass es zu jeder Kante $e \in E(H)$ eine Partition von $V(H)$ mit Kanten von H gibt, die e enthält?

c) 15 Personen wollen an sieben aufeinanderfolgenden Tagen einen Spaziergang in Gruppen mit jeweils 3 Personen machen. Dabei soll jede Person genau einmal mit jeder anderen Person in einer Gruppe unterwegs sein.
Formulieren und lösen Sie das Problem mit Hilfe eines Hypergraphen.