Lehrstuhl II für Mathematik
Prof. Dr. E. Triesch

Lehrstuhl II für Mathematik | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Höhere Mathematik I

WiSe 2014/15

Variante A

Zugelassene Hilfsmittel:
Als Hilfsmittel zugelassen sind zehn **handbeschriebene** DinA4-Blätter (Vorder- und Rückseite beschriftet, keine Fotokopien oder Ausdrucke). Das Konzeptpapier zur Bearbeitung der Aufgaben (Schmierblätter) ist von den Studierenden zur Klausur mitzubringen.
Sonstige Hilfsmittel, wie zum Beispiel alte Klausuren, Skripte oder Taschenrechner, sind **nicht** erlaubt.

Bewertung:
Benutzen Sie bitte zur Beantwortung aller Aufgaben ausschließlich das in der Klausur ausgeteilte Papier! Es werden nur die Antworten gewertet, die auf dem Antwortbogen stehen!

Hinweise zur Bewertung der einzelnen Klausurteile:

I: (Aufgabe I.1-I.3) Sie müssen unter expliziter Darstellung des Lösungsweges nachvollziehbar zu einer Lösung kommen. Ohne Lösungsweg gibt es **keine** Punkte.

II: (Aufgabe II.1-II.3) Sie müssen das **richtige Ergebnis** in das entsprechende "Ergebnis"-Kästchen des Antwortbogens eintragen. Darüber hinaus können Sie in dem dazugehörigen Feld "Lösungsskizze" einen kurzen Rechenweg angeben, der in die Bewertung mit einbezogen wird, sollte Ihr Ergebnis falsch sein.

III: (Aufgabe III.1-III.3) Sie müssen Aussagen den Wahrheitswert "wahr"(W) oder "falsch"(F) zuordnen. **Sie erhalten nur dann Punkte, wenn Sie in einer Teilaufgabe alle Wahrheitswerte richtig und komplett zuordnen. Es gibt keine Minuspunkte.**
Bitte schreiben Sie keine Rechnungen oder Begründungen zu Teil III auf den Antwortbogen. Nutzen Sie dafür Ihr eigenes Konzeptpapier.

Beispiel:
Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden zwei Aussagen: (2 Pkt.)
1. $2 \cdot 3 = 6$
2. $1 + 1 = 3$.

Antwort	1.	2.	Punkte
(i)	W	W	0
(ii)	**W**	**F**	**2**
(iii)	F	W	0
(iv)	F	F	0

Antwort	1.	2.	Punkte
(v)	F	-	0
(vi)	W	-	0
(vii)	-	F	0
(viii)	-	W	0

Viel Erfolg!

Teil I

Aufgabe I.1: **(8+8 Pkt.)**
Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\sum\limits_{k=0}^{5n-1} 2^k = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{5n-1}$ ist durch 31 teilbar für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Gegeben sei die Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ durch

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix B erfüllt die folgende Gleichung:

$$B^n = B^{n-2} + B^2 - I_3 \text{ für alle } n \geq 3,\ n \in \mathbb{N}.$$

Hierbei bezeichnet $I_3 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Einheitsmatrix.

Hinweis: Verwenden Sie das Prinzip der vollständigen Induktion.

Aufgabe I.2: **(4+4 Pkt.)**
Es sei $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$, mit

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \beta_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ ist.

b) Gegeben sei weiter der Vektor

$$w = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Darstellung von w als Linearkombination von $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3$ und β_4.

Aufgabe I.3: **(7+3 Pkt.)**

a) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor der Matrix A.

b) Es sei $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und A wie in Aufgabenteil I.3 a). Bestimmen Sie alle Eigenwerte inklusive algebraischer Vielfachheit von

$$C = \left(\begin{array}{ccc:cc} & & & 7 & 3 \\ & A & & 2 & -4 \\ & & & 5 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & B \end{array}\right).$$

Teil II

Aufgabe II.1: **((3+3+3)+4 Pkt.)**

Es sei $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$, und $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung definiert durch

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die folgenden Matrizen:

$$\text{i) } \mathcal{M}(\mathcal{E}_3,\ f,\ \mathcal{A}) \qquad \text{ii) } \mathcal{M}(\mathcal{B},\ id,\ \mathcal{E}_3) \qquad \text{iii) } \mathcal{M}(\mathcal{B},\ f,\ \mathcal{A}).$$

b) Weiter sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung definiert durch die Abbildungsmatrix

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}_2,\ g,\ \mathcal{E}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\mathcal{M}(\mathcal{A},\ g \circ f,\ \mathcal{A})$.

Aufgabe II.2: **(7 Pkt.)**

Finden Sie alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^3$, welche die folgenden zwei Bedingungen erfüllen.

- v ist orthogonal zum Vektor $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Seien $b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Orthogonalprojektion von v auf den von b_1 und b_2 aufgespannten Unterraum ist $p = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe II.3: **((2+2)+3+3+2+3 Pkt.)**

a) Es sei $z = -\dfrac{1+i}{\sqrt{2}} \in \mathbb{C}$.

i) Stellen Sie z in Polarkoordinaten dar. Dabei sei das Argument aus $[0, 2\pi)$.

ii) Berechnen Sie $1 + z^{50} + z^{100}$.

b) Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1 + 3i - z$. Bestimmen Sie z.

c) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil von

$$z = \frac{(1+i)^2(3+4i)^2}{-2-4i}.$$

d) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$, wobei $z^4 = 81e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

e) Bestimmen Sie die Teilmenge $M \subseteq \mathbb{C}$ mit

$$M = \{z \in \mathbb{C} : \ |z+1| = |z-i|\}.$$

Skizzieren Sie die Teilmenge M auf dem Antwortbogen.

Teil III

Aufgabe III.1: **(4+4+4 Pkt.)**
Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

a) Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Es gilt

1. $\det(A) + \det(B) = \det(A + B)$.

2. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

3. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$, falls die Matrix A invertierbar ist.

b) Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

1. Ist $\inf(M) \notin M$, dann besitzt die Menge M kein Minimum.

2. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $|a| + |b| \leq |a + b|$.

3. Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so existiert ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $a < q < b$.

c) Für jedes Polynom vom Grad n mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ gilt:

1. Das Polynom hat genau n verschiedene Nullstellen in $\mathbb{R}$.

2. Das Polynom hat genau n, nicht zwangsläufig verschiedene Nullstellen in $\mathbb{R}$.

3. Das Polynom hat maximal n Nullstellen in $\mathbb{R}$.

4. Das Polynom hat genau n verschiedene Nullstellen in $\mathbb{C}$.

5. Das Polynom hat genau n, nicht zwangsläufig verschiedene Nullstellen in $\mathbb{C}$.

6. Das Polynom hat maximal n Nullstellen in $\mathbb{C}$.

Aufgabe III.2: **(3+3+3 Pkt.)**
Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

a) Es sei $f : A \to B,\ x \longmapsto (x-2)^2 + 4$ eine Funktion, dann ist

1. f injektiv für $A = B = \mathbb{R}$.
2. f injektiv für $A = [2, +\infty),\ B = \mathbb{R}$.
3. f surjektiv für $A = \mathbb{R},\ B = [4, +\infty)$.
4. f bijektiv für $A = (-\infty, 2],\ B = [4, +\infty)$.

b) Die Abbildung

1. $g : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3,\ g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^3 + 3z^3 \\ 5y^2 \\ 6x + 4z \end{pmatrix}$ ist linear.
2. $h : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R},\ h(x, y, z) = 3x + 5y - 2z$ ist linear.
3. $k : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R},\ k(x, y, z) = 3x + 5y - 2z + 1$ ist linear.

c) Betrachten Sie die folgenden Matrizen.

1. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist eindeutig lösbar für alle $b \in \mathbb{R}^n$.

2. Es sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Alle Eigenwerte und Eigenvektoren von B sind reell.

3. Es sei $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 100 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & -3 & 0 \\ 10 & 5 & 7 & -1 \end{pmatrix}$ gegeben. Es gilt $\det(C) = 300$.

Aufgabe III.3: **(2+4+4 Pkt.)**

Beurteilen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen.

a) Es sei $x \in \mathbb{R}$. Für welches x ist die Zahl

$$z = (x-1)^2 + (x^2 + 3x + 2)i$$

eine rein imaginäre Zahl, d.h. $\mathrm{Re}(z) = 0$ und $\mathrm{Im}(z) \neq 0$?

1. $x = 1$ **2.** $x = -1$ **3.** $x = 2$ **4.** $x = -2$

b) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und $w = z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2$ gegeben. Dann gilt immer:

1. $\mathrm{Im}(w) = 0$. **2.** $\mathrm{Im}(w)$ ist von z_1 und z_2 abhängig.

3. $\mathrm{Re}(w) = 0$. **4.** $\mathrm{Re}(w)$ ist von z_1 und z_2 abhängig.

c) Es seien die zwei Mengen $M = \{1, 2, 3\},\ A = \{2, 5\}$ gegeben.

1. A ist eine Teilmenge von M.

2. Es gibt 6 Elemente in $A \times M$, wobei $A \times M$ das kartesische Produkt bezeichnet.

3. Die Potenzmenge von M ist $\mathcal{P}(M) = \{\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}\}$.

4. Es gibt $2^{|M|}$ Elemente in der Potenzmenge von M.

5. Die Kardinalität des kartesischen Produktes $A \times M$ ist gleich $|A| \cdot |M|$.