8. Übung Optimierung B

Aufgabe 1. Beweisen Sie den Satz von Kőnig mit Hilfe des Satzes von Dilworth.
Hinweis: Für einen bipartiten Graphen $G = (U \cup W, E)$ untersuchen Sie $(P = U \cup W, \prec)$. Dabei ist die Halbordnung $\prec$ gegeben durch die folgende Definition:
$u \prec w$ genau dann, wenn $u \in U, w \in W$ und $\{u, w\} \in E$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie den folgenden Satz von Havel und Hakimi:
Eine Folge nichtnegativer ganzer Zahlen $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ ist genau dann Gradsequenz eines Graphen, wenn die Folge $d_1 - 1, d_2 - 1, \ldots, d_{d_n} - 1, d_{d_n+1}, d_{d_n+2}, \ldots, d_{n-1}$ Gradsequenz eines Graphen ist.

Aufgabe 3. Ein *Multigraph* ist ein Graph, in dem mehrfache (d.h. parallele) Kanten zwischen Eckenpaaren zugelassen sind. Zeigen Sie:
Eine Folge $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq 0$ ganzer Zahlen ist genau dann durch einen Multigraphen realisierbar, wenn die Summe $\sum_{i=1}^{n} d_i$ gerade ist und $d_1 \leq d_2 + d_3 + \ldots + d_n$ gilt.
Hinweis: Beweisen Sie die Aufgabe mit vollständiger Induktion nach $|V(G)|$ und unterscheiden Sie für $|V(G)| \geq 4$ die Fälle $d_1 - d_2 = 0$, $d_1 - d_2 \geq d_n$ und $0 < d_1 - d_2 < d_n$.

Aufgabe 4. Eine Folge $d := (d_1, ..., d_n)$ nichtnegativer ganzer Zahlen mit $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$ ist genau dann die Gradsequenz eines schlichten Graphens mit perfektem Matching, wenn $d' := (d_1 - 1, ..., d_n - 1)$ und $d := (d_1, ..., d_n)$ Gradsequenzen von schlichten Graphen sind.