2. Übung Optimierung B

Aufgabe 1. Sei V eine Menge mit $|V| = n$. Zeigen Sie, dass es genau n^{n-2} Bäume gibt mit Eckenmenge V.
Hinweis: Prüfer Code.
Sei $V = \{v_1, ..., v_n\}$. Jedem Baum T auf V ordnen wir einen Vektor $(a_1, ..., a_{n-1})$ folgendermaßen zu:
1. Es sei v_i das Blatt mit dem kleinsten Index. Dann bezeichnen wir mit a_1 den Index der Nachbarecke von v_i und setzen $b_1 = v_i$.
2. Es sei v_i das Blatt mit dem kleinsten Index in $T - b_1$, dann bezeichnen wir mit a_2 den Index der Nachbarecke von v_i und setzen $b_2 = v_i$.
Allgemein:
Es sei v_i das Blatt mit dem kleinsten Index in $T - \{b_1, ..., b_j\}$, dann sei a_{j+1} der Index der Nachbarecke von v_i und setze $b_{j+1} = v_i$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass ein Graph G genau dann bipartit ist, wenn alle Kreise in G gerade Länge haben.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass ein Baum höchstens ein perfektes Matching besitzt.

Aufgabe 4. Ein Digraph oder gerichteter Graph ist ein Tupel $D = (V, A)$ mit $A \subseteq V \times V$. In diesem Fall nennt man die Menge A Bogenmenge. Sie besteht aus geordneten Paaren $a = (u, v)$, die man auch als gerichtete Kanten bezeichnet. Wir definieren

$$\deg_D^+(v) := |\{(v, u) \in A \mid u \in V\}| \text{ und } \deg_D^-(v) := |\{(u, v) \in A \mid u \in V\}|.$$

Der Digraph $D = (V, A)$ heißt zusammenhängend, wenn der zugrunde liegende Graph $G(D) := (V, \{\{u, v\} \mid (u, v) \in A\})$ zusammenhängend ist.
Man zeige, dass ein nichttrivialer und zusammenhängender Digraph genau dann eine orientierte Eulertour $v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_3), v_3, \dots, v_1$ besitzt, falls

$$\deg_D^+(v) = \deg_D^-(v)$$

für alle $v \in V$ gilt.

Aufgabe 5. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Gewichtsfunktion $c : E \to \mathbb{R}^+$ auf den Kanten. Sei T ein minimaler Spannbaum auf G bezüglich c. Sei weiterhin $X \subset V$ eine echte Teilmenge von V. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden drei Behauptungen:

- T ist auch ein minimaler Spannbaum bezüglich $\tilde{c} : E \to \mathbb{R}^+$ mit $\tilde{c}(e) := c^2(e)$.
- T ist auch ein minimaler Spannbaum bezüglich $\tilde{c} : E \to \mathbb{R}^+$ mit

$$\tilde{c}(e) := \begin{cases} 2c(e) & e = \{x, v\}, x \in X, v \in V \setminus X, \\ c(e) & \text{sonst.} \end{cases}$$

- T ist auch ein minimaler Spannbaum bezüglich $\tilde{c} : E \to \mathbb{R}^+$ mit

$$\tilde{c}(e) := \begin{cases} c(e) + 2 & e = \{x, y\}, x.y \in X, \\ c(e) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei eine weitere Funktion $f : E \to \mathbb{R}^+$ gegeben. Finden Sie (nichttriviale) Bedingungen für f, so dass T auch ein minimaler Spannbaum bezüglich $f + c$ ist.

Forschungsproblem. Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$, dessen Kantenmenge $E = E_1 \cup E_2$ in zwei kantendisjunkte spannende Bäume $S = (V, E_1)$ und $T = (V, E_2)$ zerfällt. Kann man G so in zwei kantendisjunkte spannende Bäume $\tilde{S} = (V, \tilde{E_1})$ und $\tilde{T} = (V, \tilde{E_2})$ zerlegen, dass $|\deg_{\tilde{S}}(v) - \deg_{\tilde{T}}(v)| \leq c$ für alle $v \in V$ und eine Konstante $c > 0$ gilt?