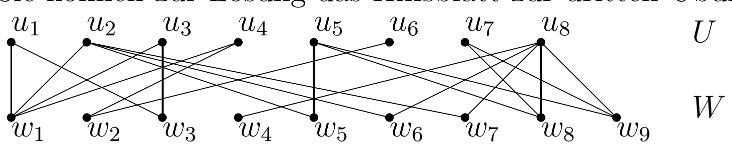
3. Übung Optimierung B

Aufgabe 1. Es sei $G = (U \cup W, E)$ ein bipartiter Graph mit Farbklassen U und W und $|U \cup W| \geq 4$. Zeigen Sie als weitere Verallgemeinerung des Satzes von Hall, dass die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:
(i) G ist zusammenhängend und jede Kante $e \in E$ liegt in einem perfekten Matching von G.
(ii) $|U| = |W|$ und $|\Gamma(A)| > |A|$ für alle $A \subseteq U$ mit $\emptyset \neq A \neq U$.
(iii) $G \setminus \{u, w\}$ hat ein perfektes Matching für alle $u \in U$ und alle $w \in W$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Hall:
(i) Ein bipartiter und r-regulärer Graph G (d.h. $d(v) = r$ für alle Ecken v aus G) lässt sich in r kantendisjunkte perfekte Matchings zerlegen.
(ii) Ist G ein bipartiter Graph und r der maximale Eckengrad von G, so kann man G in r kantendisjunkte Matchings zerlegen.

Aufgabe 3. (a) Es sei $m \leq n$ und A eine $m \times n$ Matrix mit Einträgen aus $\{1, 2, \ldots, n\}$, wobei jede Zahl höchstens einmal in jeder Zeile und höchstens einmal in jeder Spalte vorkommt (A heißt auch Lateinisches Rechteck). Zeigen Sie, dass sich jedes $m \times n$ Lateinische Rechteck zu einem $n \times n$ Lateinischen Quadrat erweitern lässt.
(b) Geben Sie eine partiell definierte $n \times n$ Matrix mit n Einträgen aus $\{1, 2, \ldots, n\}$ an, die nicht zu einem Lateinischen Quadrat ergänzt werden kann.
Hinweis zu (a): Bestimmen Sie eine weitere Zeile, indem Sie den Satz von Hall auf einen geeigneten bipartiten Graphen anwenden.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie im abgebildeten bipartiten Graphen $G = (U \cup W, E)$ ein Maximum Matching und eine Knotenüberdeckung minimaler Größe mit Hilfe der 'Ungarischen Methode'. Starten Sie mit dem Matching $M = \{u_5 w_5\}$ und wählen Sie in Schritt (1.1) des Algorithmus stets denjenigen Knoten aus, der unter allen im vorigen Schritt neu markierten Knoten den kleinsten Index hat. Sie können zur Lösung das Hilfsblatt zur dritten Übung verwenden.



Aufgabe 5. In einer Werbeagentur mit 5 Angestellten sind 5 Aufträge zu erledigen. Die Qualifikation des Mitarbeiters i für den Auftrag j sei durch die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

beschrieben (1: sehr gut ... 5: miserabel). Legen Sie zuerst Matrix A zugrunde und weisen Sie jedem Mitarbeiter genau einen Auftrag zu, so dass die Summe der Qualifikationskoeffizienten möglichst klein wird. Legen Sie dann Matrix B zugrunde und weisen Sie jedem Mitarbeiter genau einen Auftrag zu, so dass die Summe der Qualifikationskoeffizienten möglichst groß wird.